CHUYÊN ĐỀ - WWW.TOANMATH.COM

HỆ PHƯƠNG TRÌNH - HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

§ 1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

Là hệ có dạng: $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$, trong đó a, b, c, a’, b’, c’ là các số thực cho trước và a, b, a’, b’ không đồng thời bằng không.

Cách giải: Dùng định thức Crame

Ta có các định thức: $D = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$; $D_x = \begin{vmatrix} c & b \\ c' & b' \end{vmatrix}$; $D_y = \begin{vmatrix} a & c \\ a' & c' \end{vmatrix}$.

* Nếu $D \neq 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất: $x = \dfrac{D_x}{D}$; $y = \dfrac{D_y}{D}$.

* Nếu $D = D_x = D_y = 0$ thì hệ vô số nghiệm: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = \dfrac{c - ax}{b} (b \neq 0) \end{cases}$.

* Nếu $\begin{cases} D = 0 \\ \left[\begin{array}{l} D_x \neq 0 \\ D_y \neq 0 \end{array} \right. \end{cases}$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 4.1.1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = m + 2 \\ 4x + my = 3m + 2 \end{cases}$

1. Giải và biện luận hệ đã cho

2. Tìm m để hệ đã cho nghiệm duy nhất (x; y) sao cho $P = 2x^2 + y^2$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Ta có: $D = \begin{vmatrix} m & 1 \\ 4 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4 = (m-2)(m+2)$

$D_x = \begin{vmatrix} m+2 & 1 \\ 3m+2 & m \end{vmatrix} = m^2 - m - 2 = (m+1)(m-2)$

$D_y = \begin{vmatrix} m & m+2 \\ 4 & 3m+2 \end{vmatrix} = 3m^2 - 2m - 8 = (m-2)(3m+4)$

- $D \neq 0 \Leftrightarrow m \neq \pm 2$ hệ đã cho có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m+1}{m+2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3m+4}{m+2} \end{cases}$$

- $D = 0 \Leftrightarrow m = \pm 2$

+) Với $m = -2 \Rightarrow D_x \neq 0$ nên hệ đã cho vô nghiệm

+) Với $m = 2$, ta có hệ $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x + 2y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 4 - 2x \end{cases}$.

2. Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $m \neq \pm 2$

Khi đó: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{m+1}{m+2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{3m+4}{m+2} \end{cases}$ nên

$$P = 2\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^2 + \left(\frac{3m+4}{m+2}\right)^2 = \frac{11m^2 + 28m + 18}{m^2 + 4m + 4}$$

Ta có $P' = \dfrac{4(4m+5)}{(m+2)^3} \Rightarrow P' = 0 \Leftrightarrow m = -\dfrac{5}{4}$.

Do đó ta có: $\min P = \dfrac{1}{3}$ đạt được khi $m = -\dfrac{5}{4}$.

Vậy $m = -\dfrac{5}{4}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.1.2. Tùy theo giá trị của tham số m, hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \left(x - 2my + 1\right)^2 + \left(mx - 2y + 2m - 1\right)^2$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình $\begin{cases} x - 2my + 1 = 0 \\ mx - 2y + 2m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2my = -1 \\ mx - 2y = -2m + 1 \end{cases}$ (*)

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & -2m \\ m & -2 \end{vmatrix} = 2\left(m^2 - 1\right)$,

$D_x = \begin{vmatrix} -1 & -2m \\ -2m+1 & -2 \end{vmatrix} = 2 - 2m(2m-1) = 2\left(-2m^2 + m + 1\right)$,

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ m & -2m+1 \end{vmatrix} = -m + 1$.

- Nếu $m \neq -1$ thì hệ (*) có nghiệm nên $\min P = 0$
- Nếu $m = -1$ thì ta có: $P = \left(x + 2y + 1\right)^2 + (x + 2y + 3)^2$

Đặt $t = x + 2y + 1$, suy ra $P = t^2 + (t+2)^2 = 2t^2 + 4t + 4 = 2(t+1)^2 + 2 \ge 2$

Đẳng thức xảy ra khi $t = -1 \Leftrightarrow x + 2y + 2 = 0$. Do đó $\min P = 2$.

Vậy $\min P = \begin{cases} 0 & \text{khi } m \ne -1 \\ 2 & \text{khi } m = -1 \end{cases}$.

Ví dụ 4.1.3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y - 4 = 0 \\ 2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \end{cases}$.

Lời giải.

Cách 1: Đặt $t = x^2$. Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases} t + x = -y^2 - y + 4 \\ 2t + (y-5)x = y^2 - y - 2 \end{cases}$

Xét hệ bậc nhất hai ẩn t và x.

Ta có: $D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & y-5 \end{vmatrix} = y - 7$,

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -y^2 - y + 4 \\ 2 & y^2 - y - 2 \end{vmatrix} = 3y^2 + y - 10$$

$$D_t = \begin{vmatrix} -y^2 - y + 4 & 1 \\ y^2 - y - 2 & y - 5 \end{vmatrix} = -y^3 + 3y^2 + 10y - 18.$$

Vì $y = 7$ không là nghiệm của hệ nên suy ra: $D \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \dfrac{D_t}{D} \\ x = \dfrac{D_x}{D} \end{cases}$.

Vì $t = x^2 \Rightarrow \dfrac{D_t}{D} = \dfrac{D_x^2}{D^2}$

$\Leftrightarrow D_t.D = D_x^2 \Leftrightarrow (y-7)(-y^3 + 3y^2 + 10y - 18) = (3y^2 + y - 10)^2$

$\Leftrightarrow 5y^4 - 2y^3 - 24y^2 + 34y - 13 = 0 \Leftrightarrow (y-1)^2(5y^2 + 8y - 13) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \Rightarrow x = 1 \\ y = -\dfrac{13}{5} \Rightarrow x = -\dfrac{4}{5} \end{array} \right.$.

Vậy hệ có hai nghiệm: $(x; y) = (1; 1), \left(-\dfrac{4}{5}; -\dfrac{13}{5}\right)$.

Cách 2: Ta có $2x^2 + xy - y^2 - 5x + y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + (y-5)x - y^2 + y + 2 = 0$ (*)

$\Delta_x = (y-5)^2 - 8(-y^2 + y + 2) = 9y^2 - 18y + 9 = (3y-3)^2$

Nên (*) có hai nghiệm: $x = \dfrac{y+1}{2}$ và $x = 2 - y$.

- Với $x=\frac{y+1}{2}\Leftrightarrow y=2x-1$ thay vào hệ ta có được:

$$x^2+(2x-1)^2+x+2x-1-4=0\Leftrightarrow 5x^2-x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\Rightarrow y=1\\ x=-\frac{4}{5}\Rightarrow y=-\frac{13}{5}\end{array}\right.$$

- Với $x=2-y$ thay vào hệ ta có:

$(2-x)^2+x^2-2=0\Leftrightarrow 2x^2-4x+1=0\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=1$.

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;1),\ \left(-\frac{4}{5};-\frac{13}{5}\right)$.

Ví dụ 4.1.4. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}14x^2-21y^2-6x+45y-14=0\\ 35x^2+28y^2+41x-122y+56=0\end{cases}$.

Lời giải.

Cách 1: Đặt $t=x^2$, khi đó ta có hệ: $\begin{cases}14t-6x=21y^2-45y+14\\ 35t+41x=-28y^2+122y-56\end{cases}$

Ta có: $D=\begin{vmatrix}14 & -6\\ 35 & 41\end{vmatrix}=784$

$$D_t=\begin{vmatrix}21y^2-45y+14 & -6\\ -28y^2+122y-56 & 41\end{vmatrix}=693y^2-1113y+238$$

$$D_x=\begin{vmatrix}14 & 21y^2-45y+14\\ 35 & -28y^2+122y-56\end{vmatrix}=-1127y^2+3283y-1274$$

Do $D\neq 0$ nên hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases}t=\frac{D_t}{D}\\ x=\frac{D_x}{D}\end{cases}$

Vì $t=x^2$ nên ta có: $\frac{D_t}{D}=\frac{D_x^2}{D^2}\Leftrightarrow D.D_t=D_x^2$

$$\Leftrightarrow 16\left(99y^2-159y+34\right)=7\left(23y^2-67y+26\right)^2$$

$$\Leftrightarrow 3703y^4-21574y^3+38211y^2-21844y+4188=0$$

$$\Leftrightarrow (y-2)(y-3)(3703y^2-3059y+698)=0\Leftrightarrow y=2, y=3.$$

Vậy nghiệm của hệ là $(x;y)=(1;2),\ (-2;3)$.

Cách 2: Đặt $x = a + 1;\ y = b + 2$ hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 14a^2 - 21b^2 + 22a - 39b = 0 \\ 35a^2 + 28b^2 + 111a - 10b = 0 \end{cases}$$

Ta thấy hệ có nghiệm $(a;b) = (0;0)$. Với $a \neq 0$ đặ $b = ta$ ta có:

$$\begin{cases} (14 - 21t^2)a = 39t - 22 \\ (35 + 28t^2)a = 10t - 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{39t - 22}{14 - 21t^2} \\ a = \dfrac{10t - 11}{35 + 28t^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{39t - 22}{14 - 21t^2} = \frac{10t - 111}{35 + 28t^2}$$

$$\Leftrightarrow 186t^3 - 421t^2 + 175t + 112 = 0 \Leftrightarrow (3t + 1)(62t^2 - 161t + 112) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{39t - 22}{14 - 21t^2} = -3 \Rightarrow b = 1.$$

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y) = (1;2),\ (-2;3)$.

> Ví dụ 4.1.5. Cho hệ phương trình : $\begin{cases} x + ay - a = 0 \\ x^2 + y^2 - x = 0 \end{cases}$. Tìm tất cả các giá trị a để hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $(x_1;y_1),\ (x_2;y_2)$. Khi đó hãy chứng minh: $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 \le 1$.

Lời giải.

Rút x từ phương trình thứ nhất thế vào phương trình thứ hai ta được :

$(ay - a)^2 + y^2 + (ay - a) = 0 \Leftrightarrow (1 + a^2)y^2 + (a - 2a^2)y + a^2 - a = 0$ (*).

Hệ phương trình đã cho có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \Delta = (2a^2 - a)^2 - 4(a^2 - a)(1 + a^2) = -3a^2 + 4a > 0 \Leftrightarrow 0 < a < \frac{4}{3}$$

Khi đó $x_1 = ay_1 - a; x_2 = ay_2 - a$ với y_1, y_2 là hai nghiệm của (*).

Theo Viét ta có:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \dfrac{2a^2 - a}{a^2 + 1} \\ y_1 y_2 = \dfrac{a^2 - a}{a^2 + 1} \end{cases} \Rightarrow (y_1 - y_2)^2 = (y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2 = \frac{4a - 3a^2}{(a^2 + 1)^2}$$

Suy ra :

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (a^2 + 1)(y_1 - y_2)^2 = \frac{4a - 3a^2}{a^2 + 1} = 1 - \frac{(2a - 1)^2}{a^2 + 1} \le 1.$$

Ví dụ 4.1.6. Giả sử hệ phương trình $\begin{cases} x = ay^2 + by + c \\ y = mx^2 + nx + p \end{cases}$ $(a,m \neq 0)$ có bốn cặp nghiệm $(x_i; y_i)$ với i=1,2,3,4. Kí hiệu các số thực dương l_1, l_2, l_3 như sau:

$$l_1^2 = \left[(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right]\left[(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2\right]$$

$$l_2^2 = \left[(x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2\right]\left[(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2\right]$$

$$l_1^2 = \left[(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2\right]\left[(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2\right].$$

Chứng minh rằng trong các số l_1, l_2, l_3 có một số bằng tổng hai số còn lại.

Lời giải.

Ta kí hiệu các điểm $M_i(x_i; y_i)$, trong đó $(x_i; y_i)$ $i = 1,2,3,4$ là bốn cặp nghiệm của hệ đã cho thì các số l_1, l_2, l_3 được viết như sau:

$l_1^2 = (M_1M_2)^2.(M_3M_4)^2 \Rightarrow l_1 = M_1M_2.M_3M_4$.

Tương tự: $l_2 = M_2M_3.M_1M_4$; $l_3 = M_1M_3.M_2M_4$.

Vậy lúc này yêu cầu bài toán trở thành chứng minh đẳng thức(ta giả sử $l_1 = l_2 + l_3$): $M_1M_2.M_3M_4 = M_2M_3.M_1M_4 + M_1M_3.M_2M_4$ (*).

(Khi hoán vị các điểm M_i cho nhau ta có hai đẳng thức còn lại).

Vì $(x_i; y_i)$, $i = 1,2,3,4$ là nghiệm của hệ phương trình nên:

$$\begin{cases} x_i = ay_i^2 + by_i + c \\ y_i = mx_i^2 + nx_i + p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_1}{a} = y_i^2 + \dfrac{b}{a}y_i + \dfrac{c}{a} \\ \dfrac{y_i}{m} = x_i^2 + \dfrac{n}{m}x_i + \dfrac{p}{m} \end{cases}$$

$\Rightarrow x_i^2 + y_i^2 + \alpha x_i + \beta y_i + \lambda = 0$ (1).

Trong đó: $\alpha = \dfrac{n}{m} - \dfrac{1}{a}$; $\beta = \dfrac{b}{a} - \dfrac{1}{m}$; $\lambda = \dfrac{c}{a} + \dfrac{p}{m}$.

Từ (1) ta suy ra các điểm M_i nằm trên đường tròn có phương trình:

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \lambda = 0.$$

Do đó các điểm M_1, M_2, M_3, M_4 nằm trên một đường tròn nên áp dụng định lí Potoleme ta có điều phải chứng minh.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 4.1.1. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} mx + y = 2m + 1 \\ x + my = -m + 4 \end{cases}$.

1. Giải và biện luận hệ theo tham số m.

2. Giả sử hệ có nghiệm (x;y). Tìm mối liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m.
3. Tìm m nguyên để hệ có nghiệm (x;y) với x,y là những số nguyên.

Hướng dẫn giải

1) Ta có: $D = m^2 - 1 = (m-1)(m+1)$;

$D_x = 2(m-1)(m+2);\ D_y = -(m-1)^2$

- Nếu $m = 1 \Rightarrow D = D_x = D_y = 0 \Rightarrow$ hệ vô số nghiệm: $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3 - x \end{cases}$.
- Nếu $m = -1 \Rightarrow \begin{cases} D = 0 \\ D_x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow$ hệ vô nghiệm.
- Nếu $m \neq \pm 1 \Rightarrow$ hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2(m+2)}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-m+1}{m+1} \end{cases}$.

<u>KL</u>:
- $m = 1$ hệ có vô số nghiệm : $\begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = 3 - x \end{cases}$.
- $m = -1$ hệ vô nghiệm.
- $m \neq \pm 1$ hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{2(m+2)}{m+1} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{-m+1}{m+1} \end{cases}$.

2) Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \neq -1$.
- Với m=1 thì hệ thức liên hệ giữa x và y là $x + y = 3$.
- Với $m \neq 1$ hệ có nghiệm duy nhất: $\begin{cases} x = 2 + \dfrac{2}{m+1} \\ y = -1 + \dfrac{2}{m+1} \end{cases} \Rightarrow x - y = 3 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$.

Vậy hệ thức liên hệ giữa x và y không phụ thuộc vào m là: $x - y - 3 = 0$.

3) Ta có với m=1 thì hệ luôn có nghiệm nguyên.

Với $m \neq \pm 1$ hệ có nghiệm duy nhất : $\begin{cases} x = 2 + \dfrac{2}{m+1} \\ y = -1 + \dfrac{2}{m+1} \end{cases}$

$\Rightarrow x, y \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \dfrac{2}{m+1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m+1 = \pm 1 \\ m+1 = \pm 2 \end{array}\right.$.

Giải ra ta được $m = 0, m = -2, m = -3$, m = 1.

Vậy $m = 1; m = 0; m = -2; m = -3$ là những giá trị cần tìm.

Bài 4.1.2. Cho hệ phương trình: $\begin{cases}(2m+1)x-3y=3m-2\\(m+3)x-(m+1)y=2m\end{cases}$.

1. Tìm m để hệ có nghiệm.
2. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn $x\ge 2y$.
3. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất (x;y) sao cho $P=x^2+3y^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có: $D=-2(m-2)(m+2)$; $D_x=(m-2)(1-3m)$; $D_y=(m-2)(m+3)$

1) Ta có hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases}D=0\\D_x^2+D_y^2\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow m=-2$.

Vậy hệ có nghiêm $\Leftrightarrow m\ne -2$.

2) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m\ne \pm 2$ và $\begin{cases}x=\dfrac{3m-1}{2(m+2)}\\y=-\dfrac{m+3}{2(m+2)}\end{cases}$.

$$\Rightarrow x\ge 2y\Leftrightarrow \frac{3m-1}{2(m+2)}\ge -\frac{2(m+3)}{2(m+2)}\Leftrightarrow \frac{5m+5}{m+2}\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m\ge -1\\m\ne 2\end{cases}\\m<-2\end{array}\right..$$

3) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m\ne \pm 2$

Để tìm giá trị nhỏ nhất của P ta có thể giải theo hai cách sau:

* ***Cách 1:*** Dùng miền giá trị.

$$P=x^2+3y^2=\frac{3m^2+3m+7}{m^2+4m+4}\Leftrightarrow (3-P)m^2+(3-4P)m+7-4P=0\ \ (1)$$

* $P=3$ thì (1) có nghiệm $m=-\dfrac{5}{9}$.

* $P\ne 3\Rightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=52P-75\ge 0\Leftrightarrow P\ge \dfrac{75}{52}$.

Đẳng thức xảy ra khi $m=\dfrac{8}{9}$.

Vậy P nhỏ nhất $\Leftrightarrow m=\dfrac{8}{9}$ và $\text{MinP}=\dfrac{75}{52}$.

* ***Cách 2:*** Dùng BĐT Bunhiacopski.

Ta có: $x-7y=\dfrac{3m-1+7m+21}{2(m+2)}=\dfrac{10m+20}{2(m+2)}=5$.

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$25=(x-7y)^2=\left(x-\frac{7}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}y)\right)^2\le (1+\frac{49}{3})(x^2+3y^2)=\frac{52}{3}P$$

$\Rightarrow P \ge \frac{75}{52}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{x}{1} = -\frac{y}{7} \Leftrightarrow m = \frac{8}{9}$.

Bài 4.1.3. Cho hệ $\begin{cases}(m+1)x + my = 2m - 1 \\ mx - y = m^2 - 2\end{cases}$.

1. Tìm m để hệ có nghiệm duy nhất.
2. Khi hệ có nghiệm duy nhất, tìm hệ thức độc lập giữa hai nghiệm.
3. Khi hệ có nghiệm duy nhất, tìm m để x.y lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Ta có: $D = -(m^2 + m + 1); D_x = -(m-1)(m^2 + m + 1); D_y = (m-2)(m^2 + m + 1)$

1) Hệ có nghiệm duy nhất với mọi m.

2) $\begin{cases}x = m - 1 \\ y = -m + 2\end{cases} \Rightarrow x + y - 1 = 0$ là hệ thức cần tìm.

3) Ta có: $xy = -m^2 + 3m - 2 = -(m - \frac{3}{2})^2 + \frac{1}{4} \le \frac{1}{4}$

Vậy $\text{Max } x.y = \frac{1}{4}$ đạt được khi $m = \frac{3}{2}$.

Bài 4.1.4. Cho x,y là các số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = (x - 2y + 1)^2 + (2x + my + m + 1)^2.$$

Hướng dẫn giải

Xét hệ : $\begin{cases}x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + my + m + 1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x - 2y = -1 \\ 2x + my = -m - 1\end{cases}$ (*)

Hệ có $D = m + 4$, $D_x = 3m + 2$, $D_y = -m + 1$

* Nếu $m \ne -4 \Rightarrow D \ne 0 \Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x = \frac{3m+2}{m+4} \\ y = \frac{-m+1}{m+4}\end{cases}$.

$\Rightarrow P \ge 0$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases}x = \frac{3m+2}{m+4} \\ y = \frac{-m+1}{m+4}\end{cases}$.

Vậy trong trường hợp này giá trị nhỏ nhất của $P = 0$.

* Nếu $m = -4$, khi đó: $P = (x - 2y + 1)^2 + (2x - 4y - 3)^2$. Đặt $t = x - 2y + 1$ ta có:

$P = t^2 + (2t - 5)^2 = 5t^2 - 20t + 25 = 5(t-2)^2 + 5 \ge 5$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow x - 2y - 1 = 0$. Vậy trong trường hợp này giá trị nhỏ nhất của $P = 5$.

KL: $\min P = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad m \neq -4 \\ 5 & \text{khi} \quad m = -4 \end{cases}$.

Bài 4.1.5. Tìm giá trị lớn nhất của $P = (3x + y - 2)^2 + \left(6x - 2my + 5m - 1\right)^2$

Hướng dẫn giải

Xét hệ: $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 & (1) \\ 6x - 2my + 5m - 1 = 0 & (2) \end{cases}$ (*)

Từ (1) $\Rightarrow y = 2 - 3x$ thay vào (2) ta có: $6(m+1)x + m - 1 = 0$

* Nếu $m \neq -1 \Rightarrow$ (*) có nghiệm duy nhất $\Rightarrow P \geq 0$ và đẳng thức có $\Leftrightarrow$ (x;y) là nghiệm của (*) $\Rightarrow$ MinP = 0 .

* Nếu $m = -1 \Rightarrow P = (3x + y - 2)^2 + (6x + 2y - 6)^2$

Đặt $t = 3x + y - 2 \Rightarrow P = t^2 + (2t - 2)^2 = 5(t - \frac{4}{5})^2 + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5} \Rightarrow \text{MinP} = \frac{4}{5}$

Vậy $\text{MinP} = \begin{cases} 0 & \text{khi} \quad m \neq -1 \\ \frac{4}{5} & \text{khi} \quad m = -1 \end{cases}$.

Bài 4.1.6. Giả sử hệ phương trình $\begin{cases} ax + by = c \\ bx + cy = a \\ cx + ay = b \end{cases}$ có nghiệm.

Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ (1)

Hướng dẫn giải

* ***Cách 1:*** Ta thấy nếu $a = b \Rightarrow a = b = c \Rightarrow$ (1) đúng nên ta chỉ xét khi a,b,c đôi một khác nhau. Cộng ba phương trình của hệ lại với nhau ta được:

$(a + b + c)(x + y - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{array}\right.$.

* Nếu $x + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = 1 - x$. Khi đó hệ trở thành:

$\begin{cases} (a - b)x = c - b \\ (b - c)x = a - c \\ (c - a)x = b - a \end{cases} \Rightarrow \frac{c - b}{a - b} = \frac{a - c}{b - c} = \frac{b - a}{c - a} \Rightarrow a = b = c$ loại .

* Nếu $a + b + c = 0$

$\Rightarrow a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$

$\Rightarrow$ (1) đúng. Vậy ta có đpcm.

* ***Cách 2:*** Với lí luận như trên ta xét hệ khi a,b,c đôi một khác nhau.

Từ hai phương trình đầu của hệ $\Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{D_x}{D} = \dfrac{c^2 - ab}{ac - b^2} \\ y = \dfrac{D_y}{D} = \dfrac{a^2 - bc}{ac - b^2} \end{cases}$.

Thay vào phương trình thứ ba ta được:

$$\frac{c^3 - abc}{ac - b^2} + \frac{a^3 - abc}{ac - b^2} = b \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \text{ đpcm.}$$

Bài 4.1.7. Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + 3x - 15y = 0 \\ 3x^2 - 4y^2 - 5x + 2y = 0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x + 2xy = 0 \\ y^2 - 3y + xy + 1 = 0 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

1. * Nếu $x = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow (x; y) = (0; 0)$ là một nghiệm của hệ.

* Nếu $x \neq 0$ đặt $y = tx$, ta có:

$$\begin{cases} 2x^2 + t^2x^2 + 3x - 15tx = 0 \\ 3x^2 - 4t^2x^2 - 5x + 2tx = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2 + t^2)x = 15t - 3 \\ (3 - 4t^2)x = 5 - 2t \end{cases} \Rightarrow \frac{15t - 3}{2 + t^2} = \frac{5 - 2t}{3 - 4t^2}$$

$$\Leftrightarrow 58t^3 - 7t^2 - 49t + 19 = 0 \Leftrightarrow (2t - 1)(29t^2 + 22t - 19) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{1}{2} \\ t = \dfrac{-11 \pm 4\sqrt{42}}{29} \end{array}\right.$$

+) $t = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{15t - 3}{t^2 + 2} = 2 \Rightarrow y = 1$.

+) $t = \dfrac{-11 + 4\sqrt{42}}{29} \Rightarrow x = \dfrac{15t - 3}{t^2 + 2} = \dfrac{-7308 + 1740\sqrt{42}}{2475 - 88\sqrt{42}} \Rightarrow y = \dfrac{372708 - 48372\sqrt{42}}{29(2475 - 88\sqrt{42})}$.

+) $t = \dfrac{-11 - 4\sqrt{42}}{29} \Rightarrow x = \dfrac{15t - 3}{t^2 + 2} = \dfrac{-7308 - 1740\sqrt{42}}{2475 + 88\sqrt{42}} \Rightarrow y = \dfrac{372708 + 48372\sqrt{42}}{29(2475 + 88\sqrt{42})}$.

Vậy hệ đã cho có bốn cặp nghiệm.

2. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2y^2 - 3x + 2xy = 0 \\ 2y^2 - 6y + 2xy + 2 = 0 \end{cases}$ cộng hai phương trình ta có:

$$(x + 2y)^2 - 3(x + 2y) + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + 2y = 1 \\ x + 2y = 2 \end{array}\right.$$

* $x = 1 - 2y$ thay vào hệ ta có : $y^2 - 3y + y(1 - 2y) + 1 = 0$

$\Leftrightarrow y^2 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = -1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow x = 3 \mp 2\sqrt{2}$

* $x = 2 - 2y$ thay vào hệ ta được: $y^2 + y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = 3 \mp \sqrt{5}$.

§ 2. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI I

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Là hệ có dạng $\begin{cases} f(x;y)=a \\ g(x;y)=b \end{cases}$ (I) trong đó f(x;y), g(x;y) là các biểu thức đối xứng, tức là $f(x;y)=f(y;x),\ \ g(x;y)=g(y;x)$.

2. Cách giải: Đặt $S=x+y,\ P=xy$.

   Biểu diễn $f(x;y),\ g(x;y)$ qua S và P ta có hệ : $\begin{cases} F(S;P)=0 \\ G(S;P)=0 \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được S, P.

   Khi đó x,y là nghiệm của phương trình : $X^2-SX+P=0\ (1)$.

3. Một số biểu diễn biểu thức đối xứng qua S và P.

$$\begin{aligned} &x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P \\ &x^3+y^3=(x+y)(x^2+y^2-xy)=S^3-3SP \\ &x^2y+y^2x=xy(x+y)=SP \\ &x^4+y^4=(x^2+y^2)^2-2x^2y^2=(S^2-2P)^2-2P^2 \end{aligned}.$$

4. Chú ý: * Nếu (x;y) là nghiệm của hệ (I) thì (y;x) cũng là nghiệm của hệ

   * Hệ (I) có nghiệm khi (1) có nghiệm hay $S^2-4P\ge 0$.

III. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 4.2.1. Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} x+y+2xy=2 \\ x^3+y^3=8 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^3+y^3=19 \\ (x+y)(8+xy)=2 \end{cases}$.

Lời giải.

1. Đặt $S=x+y,\ P=xy$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} S+2P=2 \\ S(S^2-3P)=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{2-S}{2} \\ S(S^2-\dfrac{6-3S}{2})=8 \end{cases}$$

$\Rightarrow 2S^3+3S^2-6S-16=0 \Leftrightarrow (S-2)(2S^2+7S+8)=0$

$\Leftrightarrow S=2 \Rightarrow P=0\ \ \Rightarrow x,y$ là nghiệm phương trình :

$X^2-2X=0 \Leftrightarrow X=0, X=2$.

Vậy nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x=0 \\ y=2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$.

2. Đặt $S=x+y;\ P=xy$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} S(S^2-3P)=19 \\ S(8+P)=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=-8S \\ S^3-3(2-8S)=19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} SP=2-8S \\ S^3+24S-25=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-6 \end{cases}$$

$\Rightarrow x,y$ là nghiệm của phương trình : $X^2-X-6=0 \Leftrightarrow X_1=3;\ X_2=-2$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(-2;3),\ (3;-2)$.

Ví dụ 4.2.2. Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} 2(x+y)=3\left(\sqrt[3]{x^2y}+\sqrt[3]{xy^2}\right) \\ \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=6 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=4 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=4 \end{cases}$.

Lời giải.

1. Đặt $a=\sqrt[3]{x},\ b=\sqrt[3]{y}$. Khi đó hệ trở thành:

$\begin{cases} 2(a^3+b^3)=3(a^2b+b^2a) \\ a+b=6 \end{cases}$. Đặt $S=a+b,\ P=ab$, ta được :

$$\begin{cases} 2(S^3-3SP)=3SP \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(36-3P)=3P \\ S=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=6 \\ P=8 \end{cases}$$

Suy ra a,b là nghiệm của phương trình: $X^2-6X+8=0 \Leftrightarrow X_1=2;\ X_2=4$

Suy ra $\begin{cases} a=2 \Rightarrow x=8 \\ b=4 \Rightarrow y=64 \end{cases} \cup \begin{cases} a=4 \Rightarrow x=64 \\ b=2 \Rightarrow y=8 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=(8;\ 64),\ (64;\ 8)$.

2. Đặt $a=x+\dfrac{1}{x}, b=y+\dfrac{1}{y}$, ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} a+b=4 \\ a^2+b^2-4=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ (a+b)^2-2ab=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ ab=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{x}=2 \\ y+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1.$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Ví dụ 4.2.3. Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=4\end{cases}$	2. $\begin{cases}x+y-\sqrt{xy}=3\\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4\end{cases}$.

Lời giải.

1. Điều kiện $x,y\ge 0$.

* Cách 1 : Đặt $t=\sqrt{xy}\ge 0$, ta có: $xy=t^2$ và từ $\sqrt{x}+\sqrt{y}=4\Rightarrow x+y=16-2t$.

Thế vào phương trình (1), ta được:

$$\sqrt{t^2-32t+128}=8-t\Leftrightarrow\begin{cases}t\le 8\\ t^2-32t+128=(t-8)^2\end{cases}\Leftrightarrow t=4$$

Suy ra: $\begin{cases}xy=16\\ x+y=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\ y=4\end{cases}$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=y=4$.

* Cách 2: Ta có $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=8\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2(x^2+y^2)}+2\sqrt{xy}=16$ (*)

Ta có: $\sqrt{2(x^2+y^2)}\ge x+y$ nên

$$\sqrt{2(x^2+y^2)}+2\sqrt{xy}\ge x+y+2\sqrt{xy}=\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)^2=16$$

Do đó (*) $\Leftrightarrow x=y=4$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=y=4$.

2. Điều kiện : $\begin{cases}xy\ge 0\\ x,y\ge -1\end{cases}$.

* Cách 1: Đặt $S=x+y,\ P=xy$ ta có:

$$\begin{cases}S-\sqrt{P}=3\\ S+2+2\sqrt{S+P+1}=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S\ge 3;\quad P=(S-3)^2\\ 2\sqrt{S+(S-3)^2+1}=14-S\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3\le S\le 14;\quad P=(S-3)^2\\ 4(S^2+8S+10)=196-28S+S^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\le S\le 14;\quad P=(S-3)^2\\ S^2+30S-52=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S=6\\ P=9\end{cases}\Rightarrow x=y=3.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(3;3)$.

* Cách 2: Từ phương trình thứ nhất $\Rightarrow x+y=3+\sqrt{xy}>0\Rightarrow x,y\ge 0$ (do $xy\ge 0$)

Vì $\sqrt{xy}\le\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow x+y=3+\sqrt{xy}\le 3+\dfrac{x+y}{2}\Rightarrow x+y\le 6$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x=y=3$.

Mặt khác ta luôn có BĐT $a+b\le\sqrt{2(a^2+b^2)}$.

Áp dụng BĐT này với $a=\sqrt{x+1};b=\sqrt{y+1}$ ta có:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}\le\sqrt{2(x+y+2)}\le 4.$$

Đẳng thức có khi $x=y=3$.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(3;3)$.

* Cách 3: Với lí luận như trên ta cũng dẫn đến $x,y\ge 0$.

Nhân phương trình thứ nhất với 2 và phương trình thứ hai với 4 rồi trừ hai phương trình cho nhau ta được:

$$(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2+(\sqrt{x+1}-2)^2+(\sqrt{y+1}-2)^2=0\Leftrightarrow x=y=3$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn.

Ví dụ 4.2.4. Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases}\sqrt[4]{y^3-1}+\sqrt{x}=3\\ x^2+y^3=82\end{cases}$ 2. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{x}{y}}+\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{7}{\sqrt{xy}}+1\\ \sqrt{x^3y}+\sqrt{y^3x}=78\end{cases}$.

Lời giải.

1. Đặt $u=\sqrt{x}$ và $v=\sqrt[4]{y^3-1}$. Khi đó hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases}u+v=3\\ u^4+\left(v^4+1\right)=82\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+v=3\\ u^4+v^4=81\end{cases}\quad(*)$$

Đặt $S=u+v,P=uv$. Với điều kiện $S^2-4P\ge 0$ thì hệ $(*)$ viết lại:

$$\begin{cases}S=3\\ S^4-4S^2P+2S^2=81\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\ P^2-18P=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=0\\ S=3\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}P=18\\ S=3\end{cases}$$

- ***Trường hợp 1***: $S=3,P=0$. u, v là nghiệm của phương trình $X^2-3X=0$ phương trình này có 2 nghiệm $X=0$ hoặc $X=3$.

Khi đó: $\begin{cases}u=0\\ v=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=\sqrt[3]{82}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}u=3\\ v=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=9\\ y=1\end{cases}$

- ***Trường hợp 2***: $P=18,S=3$ không thỏa vì $S^2-4P<0$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm: $(x;y)=\left(0;\sqrt[3]{82}\right),(9;1)$.

2. Điều kiện: $xy>0$.

- ***Trường hợp 1***: $x>0,y>0$. Ta đặt $u=\sqrt{x},v=\sqrt{y}$

- ***Trường hợp 2***: $x<0,y<0$. Ta đặt $u=\sqrt{-x},v=\sqrt{-y}$

Cả 2 trường hợp đều đưa hệ về hệ phương trình:

$$\begin{cases}\dfrac{u}{v}+\dfrac{v}{u}=\dfrac{7}{uv}+1\\ u^3v+v^3u=78\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2+v^2=uv+7\\ uv(u^2+v^2)=78\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S^2-3P=7\\ P(S^2-2P)=78\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S^2=3P+7\\ P(P+7)=78\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S^2=3P+7\\ P^2+7P-78=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=6\\ S=\pm 5\end{cases}.$$

Từ đấy ta tìm được nghiệm của hệ là:

$(x;y)=(-9;-4)$, $(-4;-9)$, $(4;9)$, $(9;4)$.

Ví dụ 4.2.5. Tìm m để các hệ sau có nghiệm

1. $\begin{cases}x+y=m\\ x^2+y^2=2m+1\end{cases}$

2. $\begin{cases}x+\dfrac{1}{x}+y+\dfrac{1}{y}=5\\ x^3+\dfrac{1}{x^3}+y^3+\dfrac{1}{y^3}=15m-10\end{cases}$.

Lời giải.

1. Đặt $S=x+y,\ P=xy$, ta có: $\begin{cases}S=m\\ S^2-2P=2m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=m\\ P=\dfrac{1}{2}(m^2-2m-1)\end{cases}$.

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$S^2-4P\ge 0\Leftrightarrow m^2-2(m^2-2m-1)=-m^2+4m+2\ge 0$

$\Leftrightarrow 2-\sqrt{6}\le m\le 2+\sqrt{6}$.

2. Đặt $a=x+\dfrac{1}{x};b=y+\dfrac{1}{y}\Rightarrow|a|\ge 2;\ |b|\ge 2$.

Hệ đã cho trở thành:

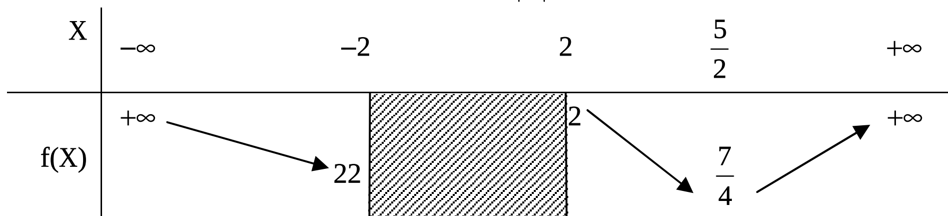
$$\begin{cases}a+b=5\\ a^3+b^3-3(a+b)=15m-10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5\\ ab=8-m\end{cases}$$

Suy ra a,b là nghiệm của phương trình :

$X^2-5X+8-m=0\Leftrightarrow X^2-5X+8=m$ (1)

Hệ đã cho có nghiệm thực $\Leftrightarrow$ (1) có hai nghiệm thỏa $|X|\ge 2$.

Xét tam thức thức $f(X)=X^2-5X+8$ với $|X|\ge 2$ ta có bảng biến thiên



Dựa vào bảng biến thiên suy ra (1) có hai nghiệm thỏa $|X| \ge 2$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \ge 22 \\ \frac{7}{4} \le m \le 2 \end{array}\right..$$

Ví dụ 4.2.6. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=m \\ x^2+y^2=m \end{cases}$ $(*)$ có nghiệm.

Lời giải.

Ta có: $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=m \\ (x+y)^2-2xy=m \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} S=x+y \\ P=xy \end{cases}$, điều kiện $S^2 \ge 4P$, ta có hệ:

$$\begin{cases} S+P=m \\ (S)^2-2P=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S+P=m \\ S^2+2S-3m=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} S_1=-1+\sqrt{1+3m} \\ P_1=m+1-\sqrt{1+3m} \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} S_2=-1-\sqrt{1+3m} \\ P_2=m+1+\sqrt{1+3m} \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Hệ phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow$ xảy ra một trong hai trường hợp sau.

* TH1: $S_1^2 \ge 4P_1 \Leftrightarrow (-1+\sqrt{1+3m})^2 \ge 4(m+1-\sqrt{1+3m})$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{1+3m} \ge m+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} m+2 \le 0 \\ 1+3m \ge 0 \end{cases} \quad (vn) \\ \begin{cases} m+2 \ge 0 \\ 4(1+3m) \ge (m+2)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \le m \le 8.$$

* TH2: $S_2^2 \ge 4P_2 \Leftrightarrow (-1-\sqrt{1+3m})^2 \ge 4(m+1+\sqrt{1+3m})$.

$\Leftrightarrow 3\sqrt{1+3m} \le -m-2$ dễ thấy bất phương trình vô nghiệm vì $-m-2<0$

Vậy để hệ phương trình có nghiệm khi $0 \le m \le 8$.

Ví dụ 4.2.7. Cho x, y, z là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=8 \\ xy+yz+zx=4 \end{cases}$.

Chứng minh $-\frac{8}{3} \le x, y, z \le \frac{8}{3}$.

Lời giải.

Hệ phương trình

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=8-z^2 \\ xy+z(x+y)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-2xy=8-z^2 \\ xy+z(x+y)=4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-2[4-z(x+y)]=8-z^2\\ xy+z(x+y)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2+2z(x+y)+(z^2-16)=0\\ xy+z(x+y)=4\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+y=4-z\\ xy=(z-2)^2\end{cases} \vee \begin{cases}x+y=-4-z\\ xy=(z+2)^2\end{cases}.$$

Do x, y, z là nghiệm của hệ nên:

$$(x+y)^2 \ge 4xy \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(4-z)^2 \ge 4(z-2)^2\\ (-4-z)^2 \ge 4(z+2)^2\end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{8}{3} \le z \le \frac{8}{3}.$$

Đổi vai trò x, y, z ta được $-\frac{8}{3} \le x, y, z \le \frac{8}{3}$.

Ví dụ 4.2.8. Cho hai số thực x, y thỏa $x+y=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A = x^3+y^3$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+y=1\\ x^3+y^3=A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S=1\\ S(S^2-3P)=A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S=1\\ P=\dfrac{1-A}{3}\end{cases}$$

Ta có x, y tồn tại $\Leftrightarrow$ hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S^2-4P \ge 0 \Leftrightarrow 1-4\frac{1-A}{3} \ge 0 \Leftrightarrow A \ge \frac{1}{4}$.

Vậy GTNN của $A=\frac{1}{4}$. Đạt được khi $x=y=\frac{1}{2}$.

Ví dụ 4.2.9. Cho các số thực $x \ne 0; y \ne 0$ thỏa mãn: $(x+y)xy = x^2+y^2-xy$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức : $A=\frac{1}{x^3}+\frac{1}{y^3}$

Lời giải.

Xét hệ phương trình : $\begin{cases}(x+y)xy=x^2+y^2-xy\\ \dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{y^3}=A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=a^2+b^2-ab\\ a^3+b^3=A\end{cases}$

(Trong đó ta đã đặt $a=\frac{1}{x}; b=\frac{1}{y}$, $a; b \ne 0$). Đặt $S=a+b; P=ab$, ta có:

$$\begin{cases}S=S^2-3P\\ S(S^2-3P)=A\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}S^2=A\\ 3P=S^2-S\end{cases}.$$

Từ phương trình thứ nhất $\Rightarrow S>0$.

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow S^2 \ge 4P \Leftrightarrow 3S^2 \ge 4(S^2-S) \Leftrightarrow S \le 4 \Leftrightarrow A=S^2 \le 16$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = \dfrac{S^2 - S}{3} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = 2 \Leftrightarrow x = y = \dfrac{1}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của A =16. Đạt được khi $x = y = \dfrac{1}{2}$.

Ví dụ 4.2.10. Cho x,y thỏa : $x - 3\sqrt{y+2} = 3\sqrt{x+1} - y$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $A = x + y$.

Lời giải.

Xét hệ phương trình: $\begin{cases} x - 3\sqrt{y+2} = 3\sqrt{x+1} - y \\ x + y = A \end{cases}$.

Đặt $a = \sqrt{x+1}; b = \sqrt{y+2} \Rightarrow a, b \ge 0$

Hệ trở thành: $\begin{cases} a^2 + b^2 - 3(a+b) - 3 = 0 \\ a^2 + b^2 = A + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = \dfrac{A}{3} = S \\ ab = \dfrac{A^2 - 9A - 27}{18} = P \end{cases}$.

Suy ra hệ đã cho có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} S \ge 0 \\ P \ge 0 \\ S^2 \ge 4P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ A^2 - 9A - 27 \ge 0 \\ A^2 - 18A - 54 \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \ge 0 \\ A \le \dfrac{9 - 3\sqrt{21}}{2} \cup A \ge \dfrac{9 + 3\sqrt{21}}{2} \\ 9 - 3\sqrt{15} \le A \le 9 + 3\sqrt{15} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{9 + 3\sqrt{21}}{2} \le A \le 9 + 3\sqrt{15}.$$

Vậy $\text{MinA} = \dfrac{9 + 3\sqrt{21}}{2}$ và $\text{MaxA} = 9 + 3\sqrt{15}$.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 4.2.1. : Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^3 + y^3 = 26 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + xy + y = 2 \\ x^2 + xy + y^2 = 4 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} = \dfrac{13}{6} \\ x + y = 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x+y+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=5 \\ x^2+y^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sqrt{x+\dfrac{1}{y}}+\sqrt{x+y-3}=3 \\ 2x+y+\dfrac{1}{y}=8 \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2y+xy^2=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$

9. $\begin{cases} xy(x-y)=-2 \\ x^3-y^3=2 \end{cases}$

10. $\begin{cases} x^3+y^3=2 \\ xy\left(x+y\right)=2 \end{cases}$

11. $\begin{cases} (x+y)(1+\dfrac{1}{xy})=5 \\ (x^2+y^2)(1+\dfrac{1}{x^2y^2})=49 \end{cases}$

12. $\begin{cases} (x+2)^2+y=10 \\ (x+2)(2x^2+xy)=9 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

1. Ta có hệ $\begin{cases} S=2 \\ S^3-3PS=26 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=2 \\ P=-3 \end{cases}$.

   Từ đây ta tìm được nghiệm của hệ là $(x;y)=(3;-1),\ (-1;3)$.

2. Ta có hệ: $\begin{cases} S+P=2 \\ S^2-P=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=2-S \\ S^2+S-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=-3 \\ P=5 \end{cases} \vee \begin{cases} S=2 \\ P=0 \end{cases}$

   Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ: $(x;y)=(0;2),\ (2;0)$.

3. Đặt $a=\sqrt{x}; b=\sqrt{y} \Rightarrow a,b\ge 0$ Ta có hệ: $\begin{cases} a^2b+b^2a=30 \\ a^3+b^3=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases}$

   Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ: $(x;y)=(4;9),\ (9;4)$.

4. Ta có hệ : $\begin{cases} \left(\dfrac{x}{y}\right)^2-\dfrac{13}{6}.\dfrac{x}{y}+1=0 \\ x+y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3} \\ x+y=5 \end{cases} \vee \begin{cases} \dfrac{x}{y}=\dfrac{3}{2} \\ x+y=5 \end{cases}$

   Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ: $(x;y)=(2;3),\ (3;2)$

5. Đặt $a=x+\dfrac{1}{x}; b=y+\dfrac{1}{y}$.

   Ta có hệ: $\begin{cases} a+b=5 \\ a^2+b^2=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases} \vee \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$

Phương trình $t+\frac{1}{t}=2\Leftrightarrow t=1$ và $t+\frac{1}{t}=3\Leftrightarrow t=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$

Nên nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left(1;\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}\right),\ \left(\frac{3\pm\sqrt{5}}{2};2\right)$.

6. Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{y}{x^2}+\frac{y^2}{x}=6\\ \frac{1}{x^2}+y^2=5\end{cases}$

Đặt $a=\frac{1}{x}$, ta có: $\begin{cases}a^2y+y^2a=6\\ a^2+y^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+y=3\\ ay=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\ y=1\end{cases}\vee\begin{cases}a=1\\ y=2\end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(1;2),\ (\frac{1}{2};1)$

7. Đặt $a=\sqrt{x+\frac{1}{y}};b=\sqrt{x+y-3}\Rightarrow a,b\ge 0$

Ta có: $\begin{cases}a+b=3\\ a^2+b^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=3\\ ab=2\end{cases}$

* $\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{x+\frac{1}{y}}=1\\ \sqrt{x+y-3}=2\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)=(3\pm\sqrt{10};4\mp\sqrt{10})$

* $\begin{cases}a=1\\ b=2\end{cases}\Leftrightarrow(x;y)=(3;1),\ (5;-1)$.

8. Đặt $S=x+y,\ P=xy$, điều kiện $S^2\ge 4P$. Hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases}SP=30\\ S(S^2-3P)=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=\frac{30}{S}\\ S\left(S^2-\frac{90}{S}\right)=35\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=5\\ P=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=5\\ xy=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\ y=3\end{cases}\vee\begin{cases}x=3\\ y=2\end{cases}$.

9. Đặt $t=-y,\ S=x+t,\ P=xt$, điều kiện $S^2\ge 4P$. Hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases}xt(x+t)=2\\ x^3+t^3=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}SP=2\\ S^3-3SP=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=2\\ P=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ t=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-1\end{cases}$.

10. Hệ phương trình đã cho tương đương:

$\begin{cases}(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)=2\\ xy(x+y)=2\end{cases}$ hay $\begin{cases}(x+y)\left[(x+y)^2-3xy\right]=2\\ xy(x+y)=2\end{cases}$ $(*)$

Đặt $S = x + y, P = xy$, điều kiện: $S^2 \ge 4P$.

Từ hệ $(*)$, ta có hệ: $\begin{cases} S^3 - 3PS = 2 \\ PS = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S^3 = 8 \\ PS = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$

Hệ cho tương đương với $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x(2 - x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy hệ phương trình cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

11. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 5 \\ x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 49 \end{cases}$

Đặt $a = x + \dfrac{1}{x}, b = y + \dfrac{1}{y}$ ta có hệ: $\begin{cases} a + b = 5 \\ a^2 + b^2 = 53 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 5 \\ ab = -14 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ b = -2 \end{cases} \vee \begin{cases} a = -2 \\ b = 7 \end{cases}$

Phương trình $t + \dfrac{1}{t} = -2 \Leftrightarrow t = -1$ và $t + \dfrac{1}{t} = 7 \Leftrightarrow t = \dfrac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}$

Nên nghiệm của hệ đã cho là:

$$\begin{cases} x = \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{7 - 3\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = \dfrac{7 + 3\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

12. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + 2x) + (2x + y) = 6 \\ (x^2 + 2x)(2x + y) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 3 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3 \\ y = 9 \end{cases}$.

Bài 4.2.2. Tìm m để các hệ phương trình sau có nghiệm

1. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + xy = m \\ x^2y + xy^2 = 3m - 9 \end{cases}$

3. $\begin{cases} \sqrt{x - 4} + \sqrt{y - 1} = 4 \\ x + y = 3m \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x + 4y = 10 \\ xy(x + 4)(y + 4) = m \end{cases}$

5. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = m \\ x + y - \sqrt{xy} = m \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt{x + 1} + \sqrt{y - 1} = m \\ x + y = m^2 - 4m + 6 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x + xy + y = m \\ x^2y + xy^2 = 3m - 8 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

1. Điều kiện $x, y \ge 0$ ta có: $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ x\sqrt{x}+y\sqrt{y}=1-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=1 \\ (\sqrt{x})^3+(\sqrt{y})^3=1-3m \end{cases}$

Đặt $S=\sqrt{x}+\sqrt{y}\ge 0, P=\sqrt{xy}\ge 0$, $S^2 \ge 4P$.

Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} S=1 \\ S^2-3SP=1-3m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=m \end{cases}$.

Từ điều kiện $S\ge 0, P\ge 0, S^2\ge 4P$ ta có $0\le m\le \frac{1}{4}$.

2. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+xy=m \\ x^2y+xy^2=3m-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+xy=m \\ xy(x+y)=3m-9 \end{cases}$.

Đặt S = x + y, P = xy, $S^2 \ge 4P$. Hệ phương trình trở thành: $\begin{cases} S+P=m \\ SP=3m-9 \end{cases}$.

Suy ra S và P là nghiệm của phương trình $t^2-mt+3m-9=0$

$\Rightarrow \begin{cases} S=3 \\ P=m-3 \end{cases} \vee \begin{cases} S=m-3 \\ P=3 \end{cases}$.

Từ điều kiện ta suy ra hệ có nghiệm

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^2\ge 4(m-3) \\ (m-3)^2\ge 12 \end{array}\right. \Leftrightarrow m\le \frac{21}{4} \vee m\ge 3+2\sqrt{3}$.

3. Đặt $u=\sqrt{x-4}\ge 0, v=\sqrt{y-1}\ge 0$ hệ trở thành:

$\begin{cases} u+v=4 \\ u^2+v^2=3m-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=4 \\ uv=\frac{21-3m}{2} \end{cases}$.

Suy ra u, v là nghiệm (không âm) của $t^2-4t+\frac{21-3m}{2}=0$ (*).

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm không âm

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta'\ge 0 \\ S\ge 0 \\ P\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3m-13}{2}\ge 0 \\ \frac{21-3m}{2}\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{13}{3}\le m\le 7$.

4. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+4x+4y=10 \\ xy(x+4)(y+4)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2+4x)+(y^2+4y)=10 \\ (x^2+4x)(y^2+4y)=m \end{cases}$.

Đặt $u=(x+2)^2\ge 0, v=(y+2)^2\ge 0$. Hệ phương trình trở thành:

$\begin{cases} u+v=10 \\ uv-4(u+v)=m-16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=10 \\ P=m+24 \end{cases}$ (S = u + v, P = uv).

Điều kiện $\begin{cases} S^2 \ge 4P \\ S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -24 \le m \le 1$.

5. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = m \\ x + y - \sqrt{xy} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = m \\ \left(\sqrt{x} + \sqrt{y}\right)^2 - 3\sqrt{xy} = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = m \\ \sqrt{xy} = \dfrac{m^2 - m}{3} \end{cases}$.

Suy ra $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ là nghiệm (không âm) của phương trình

$t^2 - mt + \dfrac{m^2 - m}{3} = 0$ (*).

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) có 2 nghiệm không âm

$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \ge 0 \\ S \ge 0 \\ P \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m \le 0 \\ m \ge 0 \\ m^2 - m \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m = 0 \\ 1 \le m \le 4 \end{array}\right.$.

Vậy $m = 0 \vee 1 \le m \le 4$.

6. Đặt $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{y-1} \Rightarrow a, b \ge 0$

Hệ trở thành: $\begin{cases} a + b = m \\ a^2 + b^2 = m^2 - 4m + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = m \\ ab = 2m - 3 \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ PT: $X^2 - mX + 2m - 3 = 0$ có hai nghiệm không âm

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{3}{2} \le m \le 2 \\ m \ge 6 \end{array}\right.$ là những giá trị cần tìm.

7. Ta có hệ $\begin{cases} S + P = m \\ SP = 3m - 8 \end{cases} \Rightarrow S, P$ là nghiệm phương trình:

$X^2 - mX + 3m - 8 = 0$ (2).

(2) có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta \ge 0 \Leftrightarrow m \le 4 \cup m \ge 8$ (*).

Gọi X_1, X_2 là hai nghiệm của (2). Khi đó hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} X_1^2 - 4X_2 < 0 \\ X_2^2 - 4X_1 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (X_1^2 - 4X_2)(X_2^2 - 4X_1) > 0 \\ X_1^2 - 4X_2 + X_2^2 - 4X_1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m^3 + 45m^2 - 96m - 64 > 0 \\ m^2 - 10m + 16 < 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-8)(-4m^2 = 13m + 8) > 0 \\ 2 < m < 8 \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{13 + 3\sqrt{33}}{8} < m < 8$.

Vậy hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \le \dfrac{13+3\sqrt{33}}{8} \cup m \ge 8$.

Bài 4.2.3. Tìm m để hệ

1. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=m+6 \\ 2x+xy+2y=m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất

2. $\begin{cases} x+xy+y=m+1 \\ x^2y+xy^2=m \end{cases}$ có nghiệm $x,y>0$

3. $\begin{cases} x^2+y^2=2(1+m) \\ (x+y)^2=4 \end{cases}$ có đúng hai nghiệm phân biệt

4. $\begin{cases} 2x^3-(y+2)x^2+xy=m \\ x^2+x-y=1-2m \end{cases}$ có nghiệm (*Đề **thi** Đạ**i** họ**c Khố**i **D – 2011)***

5. $\begin{cases} x+xy+y=m+2 \\ x^2y+xy^2=m+1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

1. Hệ có nghiệm duy nhất suy ra x = y, hệ trở thành:

$$\begin{cases} 3x^2=m+6 \\ x^2+4x=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2-6=m \\ x^2+4x=3x^2-6 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m=-3 \\ m=21 \end{array}\right..$$

- m = – 3: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ 2(x+y)+xy=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-xy=3 \\ 2(x+y)+xy=-3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ xy=-3 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{3} \\ y=-\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{3} \\ y=\sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \text{ (loại).}$$

- m = 21: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=27 \\ 2x+xy+2y=21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2-xy=27 \\ 2(x+y)+xy=21 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-8 \\ xy=37 \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=6 \\ xy=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases} \text{ (nhận).}$$

Vậy m = 21.

2. Ta có $\begin{cases} x+xy+y=m+1 \\ x^2y+xy^2=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)+xy=m+1 \\ xy(x+y)=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=m \end{cases} \vee \begin{cases} x+y=m \\ xy=1 \end{cases}$.

Hệ có nghiệm thực dương $\Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ 1\ge 4m \vee m^2\ge 4 \end{cases} \Leftrightarrow 0<m\le \dfrac{1}{4} \vee m\ge 2$.

Vậy $0 < m \le \frac{1}{4} \vee m \ge 2$.

3. Ta có: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+m) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 2(1+m) \\ (x+y)^2 = 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 1-m \\ x+y = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} xy = 1-m \\ x+y = -2 \end{cases}$.

Hệ có đúng 2 nghiệm thực phân biệt khi $(\pm 2)^2 = 4(1-m) \Leftrightarrow m = 0$.

4. Hệ phương trình đã cho viết lại: $\begin{cases} \left(x^2 - x\right)\left(2x - y\right) = m & (1) \\ \left(x^2 - x\right) + \left(2x - y\right) = 1 - 2m & (2) \end{cases}$

Dễ thấy phương trình trong hệ đã cho không phải là 1 đa thức đối xứng đối với x và y. Nhưng ta có thể nhận ra tính bất biến của bài toán

Đặt $\begin{cases} u = x^2 - x \ \left(u \ge -\frac{1}{4}\right) \\ v = 2x - y \end{cases}$ $(v\in$ ¡ $)$. Hệ đã cho trở thành :

$\begin{cases} u + v = 1 - 2m \\ uv = m, \left(u \ge -\frac{1}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = (1-2m) - u \\ -u^2 + u = m(2u+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v = 1 - 2m - u \\ \frac{-u^2 + u}{2u+1} = m \ (3) \end{cases}$

Đặt $f(u) = \frac{-u^2 + u}{2u+1}$, $u \ge -\frac{1}{4}$.

Ta có : $f'(u) = \frac{-2u^2 - 2u + 1}{(2u+1)^2}$, $u \in \left(-\frac{1}{4}; +\infty\right)$

$f'(u) = 0 \Rightarrow u = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}$

u	$-\frac{1}{4}$		$\frac{-1+\sqrt{3}}{2}$		$+\infty$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	$-\frac{5}{8}$	↗	$\frac{2-\sqrt{3}}{2}$	↘	$-\infty$

Vậy hệ có nghiệm khi (3) có nghiệm thuộc $\left[-\frac{1}{4}; +\infty\right) \Leftrightarrow m \le \frac{2-\sqrt{3}}{2}$.

5. Nếu $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ . Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0 = y_0$.

Khi đó hệ cho tương đương $\begin{cases} x_0^2 + 2x_0 = m+2 \\ 2x_0^3 = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0^3 - x_0^2 - 2x_0 + 1 = 0 \\ m = 2x_0^3 - 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x_0-1)\left(x_0^2 + x_0 - 1\right) = 0 \\ m = 2x_0^3 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = -1 \Rightarrow m = -3 \\ x_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow m = -\frac{3}{4} \\ x_0 = 1 \Rightarrow m = 1 \end{array}\right.$$

Điều kiện đủ:

Trường hợp 1: $m = 1$ hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} x + xy + y = 3 \\ x^2y + xy^2 = 2 \end{cases}$

Nhận thấy vế trái của các phương trình thành phần của hệ là các đa thức đối xứng đối với x và y.

Đặt $S = x + y, P = xy$, điều kiện: $S^2 \ge 4P$.

Hệ phương trình trên trở thành

$$\begin{cases} S + P = 3 \\ PS = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 3 - S \\ S(3-S) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện $S^2 \ge 4P$, suy ra $\begin{cases} S = 2 \\ P = 1 \end{cases}$ thỏa bài toán.

Khi đó x, y là nghiệm phương trình: $X^2 - SX + P = 0$ hay $(X-1)^2 = 0$ suy ra $X = 1$.

Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y) = (1;1)$.

Trường hợp 2: $m = -\frac{3}{4}$ hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} x + xy + y = \frac{5}{4} \\ x^2y + xy^2 = \frac{1}{4} \end{cases}$

Giải tương tự, hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Trường hợp 3: $m = -3$ hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases} x + xy + y = -1 \\ x^2y + xy^2 = -2 \end{cases}$

Giải tương tự, hệ phương trình trên có 3 nghiệm

$$(x;y) = (-2;1), (-1;-1), \ (1;-2).$$

Vậy: $m=-\frac{3}{4}$ hoặc $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài 4.2.4. Tìm m để hệ

1. $\begin{cases}x+y=m\\x^2+y^2=-m^2+6\end{cases}$ có nghiệm (x; y). Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của $F=xy+2(x+y)$.

2. $\begin{cases}x+y=2m-1\\x^2+y^2=m^2+2m-3\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ và $P=xy$ nhỏ nhất.

3. $\begin{cases}x+y=m\\x^2+y^2=m^2-4m+6\\x\ge 0, y\ge 0; 0\le m\le 2\end{cases}$ có nghiệm $(x;y)$ và tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của : $T=(x+y)^3+6xy(x+y)+39m+2$.

Hướng dẫn giải

1. Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=m\\xy=m^2-3\end{cases}\Rightarrow$ hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m^2\ge 4(m^2-3)\Leftrightarrow -2\le m\le 2$.

Khi đó: $F=m^2-3+2m=(m+1)^2-4$. Vì $-2\le m\le 2$ nên

$\text{MaxF}=5$ và $\text{MinF}=-4$.

2. Đặt $S=x+y$, $P=xy$, điều kiện $S^2\ge 4P$.

$$\begin{cases}x+y=2m-1\\x^2+y^2=m^2+2m-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=2m-1\\S^2-2P=m^2+2m-3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}S=2m-1\\(2m-1)^2-2P=m^2+2m-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=2m-1\\P=\frac{3}{2}m^2-3m+2\end{cases}$$

Từ điều kiện suy ra $(2m-1)^2\ge 6m^2-12m+8\Leftrightarrow\frac{4-\sqrt{2}}{2}\le m\le\frac{4+\sqrt{2}}{2}$.

Xét hàm số $f(m)=\frac{3}{2}m^2-3m+2$, $\frac{4-\sqrt{2}}{2}\le m\le\frac{4+\sqrt{2}}{2}$.

Ta có $\min f(m)=f\left(\frac{4-\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{11-6\sqrt{2}}{4}, \forall m\in\left[\frac{4-\sqrt{2}}{2};\frac{4+\sqrt{2}}{2}\right]$

Vậy $\min P=\frac{11-6\sqrt{2}}{4}\Leftrightarrow m=\frac{4-\sqrt{2}}{2}$.

3. Đặt $S = x + y, P = xy$. Hệ cho trở thành: $\begin{cases} S = m \\ P = 2m - 3 \end{cases}$.

Hệ có nghiệm khi phương trình: $t^2 - mt + 2m - 3 = 0$ có nghiệm

$$\begin{cases} t_1, t_2 \ge 0 \\ 0 \le m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta \ge 0 \\ S \ge 0 \\ P \ge 0 \\ 0 \le m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m \le 2 \\ m \ge 6 \end{array}\right. \\ 0 \le m \le 2 \\ \dfrac{3}{2} \le m \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{2} \le m \le 2 \text{ thỏa bài toán.}$$

Khi đó $T = m^3 + 6(2m - 3)m + 39m + 2 = m^3 + 12m^2 + 21m + 2$

Ta xét hàm số $f(m) = m^3 + 12m^2 + 21m + 2$ trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$.

Ta có $f'(m) = 3m^2 + 24m + 21 > 0,\ \forall m \in \left(\frac{3}{2}; 2\right) \Rightarrow f(m)$ luôn đồng biến trên đoạn $\left[\frac{3}{2}; 2\right]$ và $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{511}{8},\ f(2) = 100$

Vậy: $\min T = \min\limits_{m \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]} f(m) = \frac{511}{8}$ khi $m = \frac{3}{2}$

và $\max T = \max\limits_{m \in \left[\frac{3}{2}; 2\right]} f(m) = 100$ khi $m = 2$.

§ 3. HỆ ĐỐI XỨNG LOẠI II

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Là hệ có dạng $\begin{cases} f(x; y) = a \\ f(y; x) = a \end{cases}$ (II)

2. Cách giải: Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta được :

$$f(x; y) - f(y; x) = 0 \Leftrightarrow (x - y)g(x; y) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ g(x; y) = 0 \end{array}\right..$$

3. Chú ý:

- Nếu hệ (II) có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ nên hệ (II) có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0 = y_0$.
- $f(x; y) + f(y; x) = 2a$ là một phương trình đối xứng.

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 4.3.1. Giải các hệ phương trình :

1. $\begin{cases} x^2 = 3x + 2y \\ y^2 = 3y + 2x \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases}$.

Lời giải.

1. Trừ vế với vế của hai phương trình trên ta được:

$$x^2 - y^2 = x - y \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = 1 - y \end{array}\right.$$.

- Với $x = y \Rightarrow x^2 = 3x \Leftrightarrow x = 0, x = 3$
- Với $x = 1 - y \Rightarrow y^2 = 3y + 2(1-y) \Leftrightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1 \Rightarrow x = 2 \\ y = 2 \Rightarrow x = -1 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y) = (0;0),\ (3;3),\ (-1;2),\ (2;-1)$.

2. Trừ hai phương trình của hệ ta có

$$x^3 - y^3 = 2(y-x) \Leftrightarrow (x-y)\left(x^2 + xy + y^2 + 2\right) = 0$$

$\Leftrightarrow x = y$ (do $x^2 + xy + y^2 + 2 > 0,\ \forall x, y$)

Thay vào hệ ta có được:

$$x^3 + 1 = 2x \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $\left[\begin{array}{l} x = y = 1 \\ x = y = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$.

Ví dụ 4.3.2. Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} \dfrac{3}{x^2} = 2x + y \\ \dfrac{3}{y^2} = 2y + x \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \sqrt{x+9} + \sqrt{y-7} = 8 \\ \sqrt{y+9} + \sqrt{x-7} = 8 \end{cases}$.

Lời giải.

1. Điều kiện : $x, y \neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 + x^2y = 3 \\ 2y^3 + y^2x = 3 \end{cases} \Rightarrow 2(x^2 - y^3) + xy(x-y) = 0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(2x^2 + 3xy + 2y^2) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

(Do $2x^2 + 3xy + 2y^2 = 2(x + \frac{3}{4}y)^2 + \frac{7}{8}y^2 > 0$)

Thay vào hệ ta được: $3x^3 = 3 \Leftrightarrow x = 1 = y$.

Vậy hệ có nghiệm: $x = y = 1$.

2. Điều kiện : $x, y \ge 7$.

Trừ hai phương trình của hệ ta được: $\sqrt{x+9} + \sqrt{y-7} = \sqrt{y+9} + \sqrt{x-7}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+9)(y-7)} = \sqrt{(y+9)(x-7)} \Leftrightarrow x = y$.

Thay vào hệ ta được: $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-7} = 8$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+9} + \sqrt{x-7} = 8 \\ \sqrt{x+9} - \sqrt{x-7} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+9} = 5 \\ \sqrt{x-7} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = 16.$$

Vậy hệ có nghiệm: $x = y = 16$.

Ví dụ 4.3.3. Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = 2 \\ \sqrt{y} + \sqrt{2-x} = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \sqrt{5x+1} + \sqrt{12-y} = 7 \\ \sqrt{5y+1} + \sqrt{12-x} = 7 \end{cases}$.

Lời giải.

1. Điều kiện: $0 \le x, y \le 2$

Trừ hai phương trình của hệ ta có: $\sqrt{x} - \sqrt{2-x} = \sqrt{y} - \sqrt{2-y}$ (*)

Do hàm số $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt{2-t}$ là một hàm liên tục và đồng biến trên $(0;2)$

Nên (*) $\Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Thay vào hệ ta có:

$\sqrt{x} + \sqrt{2-x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x(2-x)} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy nghiệm của hệ: $x = y = 1$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} -\frac{1}{5} \le x \le 12 \\ -\frac{1}{5} \le x \le 12 \end{cases}$.

Trừ hai phương trình của hệ ta được:

$$\sqrt{5x+1} - \sqrt{12-x} = \sqrt{5y+1} - \sqrt{12-y} \quad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = \sqrt{5t+1} - \sqrt{12-t}$, $t \in \left[-\frac{1}{5};12\right]$, ta có:

$$f'(x) = \frac{5}{2\sqrt{5t+1}} + \frac{1}{2\sqrt{12-t}} > 0, \ \forall t \in \left(-\frac{1}{5};12\right)$$

Suy ra $(1) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Thay x = y vào hệ, ta được:

$\sqrt{5x+1} + \sqrt{12-x} = 7 \Leftrightarrow 4x + 13 + 2\sqrt{(5x+1)(12-x)} = 49$

$\Leftrightarrow \sqrt{-5x^2+59x+12} = 18-2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 9 \\ 9x^2-131x+312=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$ (nhận).

Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x = 3 \\ y = 3 \end{cases}$.

Ví dụ 4.3.4. Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$.

Lời giải.

1. Trừ hai phương trình của hệ ta có:

$x^3 - y^3 = x - y \Leftrightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2+xy+y^2-1=0 \end{array}\right.$.

- $x = y$ thay vào hệ ta được: $x^3 = 3x \Leftrightarrow x = 0, x = \pm\sqrt{3}$
- $x^2+xy+y^2 = 1$ (1)

Cộng hai phương trình của hệ ta có: $x^3+y^3-3(x+y)=0$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} x^2+xy+y^2-1=0 \\ x^3+y^3-3(x+y)=0 \end{cases}$

Đặt $S = x+y,\ P = xy$ ta có:

$\begin{cases} S^2-P-1=0 \\ S^3-3SP-3S=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = S^2-1 \\ S^3-3S(S^2-1)-3S=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 0 \\ P = -1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$.

Vậy hệ phương trình có 5 nghiệm phân biệt:

$\begin{cases} x = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}$.

2. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} xy^2+6x-y^2-6 = yx^2+y \\ yx^2+6y-x^2-6 = xy^2+x \end{cases}$

Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ ta được:

$2xy(y-x)+7(x-y)+(x-y)(x+y)=0$

$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x+y-2xy+7=0 \end{array}\right.$

- $x = y$ thay vào hệ ta được: $x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 2 \\ x = y = 3 \end{array}\right.$.
- $x + y - 2xy + 7 = 0$ (1)

  Mặt khác, khi cộng hai phương trình của hệ đã cho ta được:

  $x^2 + y^2 - 5x - 5y + 12 = 0$ (2)

  Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} x + y - 2xy + 7 = 0 \\ x^2 + y^2 - 5x - 5y + 12 = 0 \end{cases}$

  Đặt $S + x + y, P = xy$ ta có hệ:

  $\begin{cases} S - 2P + 7 = 0 \\ S^2 - 5S - 2P + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = \dfrac{S+7}{2} \\ S^2 - 6S + 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ P = 4 \end{cases} \vee \begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$

  Với $\begin{cases} S = 1 \\ P = 4 \end{cases}$ ta thấy hệ vô nghiệm; Với $\begin{cases} S = 5 \\ P = 6 \end{cases}$ ta có $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$.

  Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x; y) = (2;2), (3;3), (2;3), (3;2)$.

Ví dụ 4.3.5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x + \sqrt{y-1} = m \\ 2y + \sqrt{x-1} = m \end{cases}$.

Lời giải.

Đk : $x, y \ge 1$. Đặt $a = \sqrt{x-1}, b = \sqrt{y-1} \Rightarrow a, b \ge 0$, ta có:

$\begin{cases} 2a^2 + b = m - 2 \\ 2b^2 + a = m - 2 \end{cases} \Rightarrow 2(a-b)(a+b) + b - a = 0$

$\Leftrightarrow (a-b)(2a + 2b - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = b \\ a = \dfrac{1-2b}{2} \end{array}\right.$.

* $a = b \Rightarrow 2a^2 + a = m - 2 \Rightarrow$ PT có nghiệm $a \ge 0 \Leftrightarrow m - 2 \ge 0 \Leftrightarrow m \ge 2$.

* $a = \dfrac{1-2b}{2} \Rightarrow \begin{cases} 0 \le b \le \dfrac{1}{2} \\ 4b^2 - 2b = 2m - 5 \end{cases}$

$\Rightarrow$ Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow -\dfrac{1}{4} \le 2m - 5 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{19}{8} \le m \le \dfrac{5}{2}$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm khi $m \ge 2$.

Ví dụ 4.3.6. Tìm m để các hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất.

1) $\begin{cases} x = y^2 - y + m \\ y = x^2 - x + m \end{cases}$	2) $\begin{cases} 3x^2 = y^3 - 2y^2 + my \\ 3y^2 = x^3 - 2x^2 + mx \end{cases}$.

Lời giải.

1) **Điều kiện cần**: Giả sử hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0 = y_0$.

Thay vào hệ ta được: $x_0^2 - 2x_0 + m = 0$

phương trình này có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta' = 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 1$.

Điều kiện đủ: Với $m = 1$ hệ trở thành:

$$\begin{cases} x = y^2 - y + 1 \\ y = x^2 - x + 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 1.$$

Thử lại ta thấy thỏa mãn hệ

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm.

2) **Điều kiện cần**: Giả sử hệ có nghiệm $(x_0; y_0)$ thì $(y_0; x_0)$ cũng là nghiệm của hệ nên để hệ có nghiệm duy nhất thì trước hết $x_0 = y_0$.

Thay vào hệ ta được: $x_0^3 - 5x_0^2 + mx_0 = 0$ (1) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 0 \\ x_0^2 - 5x_0 + m = 0 \ (*) \end{array}\right.$

(1) có nghiệm duy nhất thì (*) phải vô nghiệm hoặc có nghiệm kép $x = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \Delta = 25 - 4m < 0 \\ \begin{cases} \Delta = 25 - 4m = 0 \\ 5 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow m > \frac{25}{4}.$$

Điều kiện đủ: Với $m > \frac{25}{4}$ ta có:

$$\begin{cases} 3x^2 = y(y^2 - 2y + m) = y[(y-1)^2 + m - 1] \\ 3y^2 = x(x^2 - 2x + m) = x[(x-1)^2 + m - 1] \end{cases} \Rightarrow x, y \ge 0$$

Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta được:

$$x(x^2 - 5x + m) + y(y^2 - 5y + m) = 0$$

$$\Leftrightarrow x[(x - \frac{5}{2})^2 + m - \frac{25}{4}] + y[(y - \frac{5}{2})^2 + m - \frac{25}{4}] = 0 \Leftrightarrow x = y = 0.$$

Vậy $m > \frac{25}{4}$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.3.7. Chứng minh rằng hệ sau có nghiệm duy nhất với mọi $a \neq 0$:

$$\begin{cases} 2x^2 = y + \dfrac{a^2}{y} \\ 2y^2 = x + \dfrac{a^2}{x} \end{cases}.$$

Lời giải.

Điều kiện : $x \neq 0$.

Từ hai phương trình của hệ $\Rightarrow x, y > 0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y = y^2 + a^2 \\ 2y^2x = x^2 + a^2 \end{cases} \Rightarrow 2xy(x-y) = y^2 - x^2$

$\Leftrightarrow (x-y)(2xy + x + y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (do $x, y > 0 \Rightarrow 2xy + x + y > 0$).

Thay vào hệ ta được: $a^2 = 2x^3 - x^2 = f(x)$ (*).

Xét hàm số $f(x) = 2x^3 - x^2$ với $x > 0$.

Ta có: $f'(x) = 2x(3x-1) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Mà $f(0) = 0; f(\dfrac{1}{3}) = -\dfrac{1}{27}$ và $a^2 > 0$ nên phương trình (*) chỉ có duy nhất một nghiệm .

Vậy hệ đã cho luôn có nghiệm duy nhất với mọi $a \neq 0$.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 4.3.1. Giải các hệ phương trình sau

1) $\begin{cases} x^3 = 2x + y \\ y^3 = 2y + x \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 - 2y^2 = 2x + y \\ y^2 - 2x^2 = 2y + x \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^3 + 2 = 3y \\ y^3 + 2 = 3x \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x^2 = \dfrac{1}{y} + y \\ 2y^2 = \dfrac{1}{x} + x \end{cases}$ 5) $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{2-y} = \sqrt{2} \\ \sqrt{y} + \sqrt{2-x} = \sqrt{2} \end{cases}$ 6) $\begin{cases} \sqrt{x+4} - 2\sqrt{y} = 2 \\ \sqrt{y+4} - 2\sqrt{x} = 2 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^3 + 2x = y \\ y^3 + 2y = x \end{cases}$ 8. $\begin{cases} \sqrt{2x+3} + \sqrt{4-y} = 4 \\ \sqrt{2y+3} + \sqrt{4-x} = 4 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x = \dfrac{x^2+2}{y^2} \\ 3y = \dfrac{y^2+2}{x^2} \end{cases}$

10. $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2x^2 - xy - 1 = 0 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x - y = \cos x - \cos y \\ x^2y - 3y - 18 = 0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = y - \dfrac{1}{y} \\ 2y = x^3 + 1 \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

1) Trừ vế theo vế hai phương trình của hệ, ta được:

$$x^3 - y^3 = x - y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \end{array}\right.$$

* $\begin{cases} x = y \\ x^3 = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 3 \end{array}\right.$

* $\begin{cases} x^2 + y^2 + xy - 1 = 0 \\ x^3 = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^3 - 2x \\ x^2 + (x^3 - 2x)^2 + x(x^3 - 2x) - 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 1 = 0 \\ y = x^3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 - 1)^3 = 0 \\ y = x^3 - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x;y) = (-1;1) \\ (x;y) = (1;-1) \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm: $(x;y) = (0;0),(3;3),(-1;1),(1;-1)$.

2) Trừ hai phương trình của hệ ta được: $3(x^2 - y^2) = x - y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x = \dfrac{1-3y}{3} \end{array}\right.$.

* $\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2y^2 = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = -3 \end{array}\right.$.

* $\begin{cases} x = \dfrac{1-3y}{3} \\ x^2 - 2y^2 = 2x + y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1-3y}{3} \\ -9y^2 + 3y - 5 = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm

Vậy hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y) = (0;0),(-3;-3)$.

3) Trừ hai phương trình của hệ ta có:

$$x^3 - y^3 = 3(y - x) \Leftrightarrow (x - y)\left(x^2 + xy + y^2 + 3\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y \\ x^2 + xy + y^2 + 3 = 0 \text{ vn}_0 \end{array}\right.$$

Thay $x = y$ vào hệ ta có:

$$x^3 + 2 = 3x \Leftrightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0 \Leftrightarrow x = 1, x = -2$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (1;1),(-2;-2)$.

4) Điều kiện: $xy \neq 0$. Từ hệ $\Rightarrow x, y > 0$

Trừ hai phương trình của hệ ta có: $(x - y)(2xy + x + y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

Thay vào hệ ta có:

$$2x^2 = \frac{1}{x} + x \Leftrightarrow 2x^3 - x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(2x^2 + x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (1;1)$.

5) Điều kiện: $0 \le x, y \le 2$

Trừ hai phương trình của hệ: $\sqrt{x}-\sqrt{2-x}=\sqrt{y}-\sqrt{2-y}\Leftrightarrow x=y$

Do hàm số $f(t)=\sqrt{t}-\sqrt{2-t}$ là hàm đồng biến trên $[0;2]$.

$\Rightarrow (x;y)=(0;0),(2;2)$

6) Điều kiện: $x,y\ge 0$

Trừ hai phương trình của hệ: $\sqrt{x+4}+2\sqrt{x}=\sqrt{y+4}+2\sqrt{y}\Leftrightarrow x=y$

$\Rightarrow x=y=0$

7. Trừ hai phương trình của hệ vế theo vế ta được:

$x^3-y^3+3x-3y=0\Leftrightarrow (x-y)(x^2+y^2+xy+3)=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)\left[\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+3\right]=0\Leftrightarrow y=x$$

Thế y = x vào hệ ta được: $x^3+x=0\Leftrightarrow x=0$

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=0\\y=0\end{cases}$.

8. Điều kiện: $\begin{cases}-\dfrac{3}{2}\le x\le 4\\-\dfrac{3}{2}\le x\le 4\end{cases}$.

Trừ hai phương trình của hệ ta được:

$\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{2y+3}-\sqrt{4-y}\quad (1)$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{2t+3}-\sqrt{4-t}$, $t\in\left[-\dfrac{3}{2};\ 4\right]$, ta có:

$f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2t+3}}+\dfrac{1}{2\sqrt{4-t}}>0,\ \forall t\in\left(-\dfrac{3}{2};\ 4\right)\Rightarrow (1)\Leftrightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay x = y vào hệ, ta được:

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}=4\Leftrightarrow x+7+2\sqrt{(2x+3)(4-x)}=16$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+12}=9-x\Leftrightarrow x=3\vee x=\frac{11}{9}\ \text{(nhận)}.$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}\vee\begin{cases}x=\dfrac{11}{9}\\y=\dfrac{11}{9}\end{cases}$.

9. Điều kiện: $x>0,\ \ y>0$.

Hệ phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases}3xy^2=x^2+2 & (1)\\3yx^2=y^2+2 & (2)\end{cases}$

Trừ (1) và (2) vế theo vế, ta được: $(x-y)(3xy+x+y)=0$

$\Rightarrow x=y$ vì $3xy+x+y>0$ với mọi $x>0,\ y>0$

Thay $x=y$ vào phương trình (1) ta được

$3x^3-x^2-2=0 \Leftrightarrow (x-1)(3x^2+2x+2)=0$,

Phương trình này có nghiệm $x=1$ vì $3x^2+2x+2>0$ với mọi $x>0$

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm $(1;1)$.

10. Điều kiện: $x\neq 0,\ y\neq 0$. Ta có:

$$x-\frac{1}{x}=y-\frac{1}{y} \Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow y=x \vee y=-\frac{1}{x}.$$

+) Với y = x: (2) $\Leftrightarrow x^2-1=0 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

+) Với $y=-\frac{1}{x}$: (2) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases} \vee \begin{cases}x=-1\\y=-1\end{cases}$.

11. Ta có: $x-y=\cos x-\cos y \Leftrightarrow x-\cos x=y-\cos y$ (1).

Xét hàm số $f(t)=t-\cos t \Rightarrow f'(t)=1+\sin t>0,\ \forall t\in ¡$.

Suy ra (1) $\Leftrightarrow f(x)=f(y) \Leftrightarrow x=y$.

Thay x = y vào phương trình thứ hai của hệ, ta được:

$x^3-3x-18=0 \Leftrightarrow (x-3)(x^2+3x+6)=0 \Leftrightarrow x=3$.

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=3\\y=3\end{cases}$.

12. Điều kiện: $x\neq 0,\ y\neq 0$.

$$(1) \Leftrightarrow x-y+\frac{x-y}{xy}=0 \Leftrightarrow (x-y)\left(1+\frac{1}{xy}\right)=0 \Leftrightarrow x=y \vee y=-\frac{1}{x}.$$

+ Với $x=y$: (2) $\Leftrightarrow x=1 \vee x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

+ Với $y=-\frac{1}{x}$: (2) $\Leftrightarrow x^4+x+2=0$.

* Với $|x|<1 \Rightarrow x+2>0 \Rightarrow x^4+x+2>0$.

* Với $|x|\geq 1 \Rightarrow x^4\geq |x|\geq -x \Rightarrow x^4+x+2>0$.

Suy ra (2) vô nghiệm.

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm phân biệt

$$\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ y=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

Bài 4.3.2. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm

1) $\begin{cases} x+\sqrt{y-3}=m \\ y+\sqrt{x-3}=m \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ \sqrt{y+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{m} \end{cases}$ $(m \ge 0)$

Hướng dẫn giải

1) Đặt $a=\sqrt{x-2}; b=\sqrt{y-2} \Rightarrow a,b \ge 0$

Hệ trở thành: $\begin{cases} a^2+b=m-2 \\ b^2+a=m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b=m-2 \\ (a-b)(a+b-1)=0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^2+a=m-2 \quad (1) \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} b=1-a \\ a^2-a=m-3 \quad (2) \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) hoặc (2) có nghiệm không âm $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m-2 \ge 0 \\ m-3 \ge -\dfrac{1}{4} \end{array}\right. \Leftrightarrow m \ge 2$.

2) Điều kiện: $x,y \ge 2$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}+\sqrt{y-2}=\sqrt{m} \\ \sqrt{x+1}-\sqrt{x-2}=\sqrt{y+1}-\sqrt{y-2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}=\sqrt{m} \quad (1) \end{cases}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (1) có nghiệm $\Leftrightarrow \sqrt{m} \ge \sqrt{3} \Leftrightarrow m \ge 3$.

Bài 4.3.3. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm duy nhất

1. $\begin{cases} y^2=x^3-4x^2+mx \\ x^2=y^3-4y^2+my \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 2x^2=y+\dfrac{m^2}{y} \\ 2y^2=x+\dfrac{m^2}{x} \end{cases}$

3. $\begin{cases} (x+1)^2=y+m \\ (y+1)^2=x+m \end{cases}$ 4. $\begin{cases} \sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}-4=m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}-4=m-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

1) * Giả sử hệ có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0) \Rightarrow x_0=y_0$ và phương trình

$x_0^2=x_0^3-4x_0^2+mx_0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0 \\ x_0^2-5x_0+m=0 \quad (1) \end{array}\right.$ có nghiệm duy nhất

$\Leftrightarrow$ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow \Delta=25-4m<0 \Leftrightarrow m>\dfrac{25}{4}$ (*)

* Với $m > \frac{25}{4}$. Từ hệ $\Rightarrow (x-y)(x^2+xy+y^2-3x-3y+m)=0$ (2)

Xét tam thức: $f(x)=x^2+(y-3)x+y^2-3y+m$, tam thức có

$\Delta_x=(y-3)^2-4(y^2-3y+m)=-3(y-1)^2+12-4m<0$ (do (*))

$\Rightarrow (2) \Leftrightarrow x=y$ thay vào hệ ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $x=y=0$

Vậy $m > \frac{25}{4}$.

2) Điều kiện: $xy \neq 0$. Từ hệ $\Rightarrow x, y > 0$

* Giả sử hệ có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0) \Rightarrow x_0=y_0$ và phương trình

$2x_0^2=x_0+\frac{m^2}{x_0} \Leftrightarrow 2x_0^3-x_0^2=m^2$ (1) có nghiệm duy nhất.

Xét hàm số $f(x)=2x^3-x^2$. Lập bảng biến thiên của f(x) và từ bảng biến thiên ta thấy (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m^2>0 \Leftrightarrow m\neq 0$.

* Với $m \neq 0 \Rightarrow$ hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2y=y^2+m^2 \\ 2xy^2=x^2+m^2 \end{cases}$ giải hệ này ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $x=y$.

Vậy $m\neq 0$ là những giá trị cần tìm.

3) Tương tự như trên ta tìm được $m=\frac{3}{4}$.

4. Nếu $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ thì các cặp số sau cũng là nghiệm của hệ $(y_0;x_0),(4-x_0;4-y_0),(4-y_0;4-x_0)$.

Vì hệ có nghiệm duy nhất, nên xảy ra khả năng $(x_0;y_0)\equiv(y_0;x_0)$ và vì thế ta tìm được $x_0=2$.

Với $x_0=2$ thay vào hệ ta được $m-2=\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}}$, $2<m<\frac{10}{3}$.

Đặt $\sqrt{10-3m}=t$, $t>2$, khi đó ta có: $\begin{cases} m-2=\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \\ t-1=4-\sqrt{4-3\sqrt{10-3m}} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (m-2)^2=10-3t \\ (t-2)^2=10-3m \end{cases}$ (3) $\Rightarrow (m-t)(m+t-4)=3(m-t)$

tức $(m-t)(m+t-1)=0 \Leftrightarrow m=t$ vì $m+t-1>1$

Khi đó (3) suy ra $(m-2)^2=10-3 \Leftrightarrow m^2-m-6=0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} m=3$.

Với m = 3, hệ cho trở thành: $\begin{cases}\sqrt{7+x}+\sqrt{11-y}=6\\ \sqrt{7+y}+\sqrt{11-x}=6\end{cases}$, giải tương tự trên ta thấy hệ có nghiệm duy nhất $x=y=2$.

Vậy m = 3 thỏa mãn đề bài.

Bài 4.3.4. Chứng minh rằng hệ sau luôn có nghiệm duy nhất với mọi $a\neq 0$:

$$\begin{cases}7x+y-\dfrac{a^3}{x^2}=0\\ 7y+x-\dfrac{a^3}{y^2}=0\end{cases}.$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện: $xy\neq 0$.

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}7x^3+yx^2-a^3=0\\ 7y^3+xy^2-a^3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x^3+yx^2-a^3=0\\ (x-y)(7x^2+8xy+7y^2)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow x=y=\dfrac{a}{2}$ là nghiệm duy nhất của hệ.

§ 4. HỆ ĐẲNG CẤP

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. *Định nghĩa:*

* Biểu thức f(x;y) gọi là đẳng cấp bậc k nếu $f(mx;my)=m^k f(x;y)$.

Ví dụ: $f(x;y)=x^3-y^3+3x^2y$ là đẳng cấp bậc 3.

* Hệ: $\begin{cases} f(x;y)=a \\ g(x;y)=b \end{cases}$ trong đó f(x;y) và g(x;y) đẳng cấp bậc k gọi là hệ đẳng cấp.

2. *Cách giải:*

* Xét x=0 thay vào hệ kiểm tra.

* Với $x\neq 0$ đặt $y=tx$ thay vào hệ ta có: $\begin{cases} f(x;tx)=a \\ g(x;tx)=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^k f(1;t)=a \\ x^k g(1;t)=b \end{cases}$.

Chia hai vế của hai phương trình ta được: $f(1;t)=\frac{a}{b}g(1;t)$, giải phương trình này ta tìm được t thay vào hệ ta tìm được (x;y).

II. CÁC VÍ DỤ MINH HỌA

Ví dụ 4.4.1. Giải các hệ phương trình sau:
1. $\begin{cases} x^2+2xy+y^2=4 \\ -x^2+xy+2y^2=4 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=38 \\ 5x^2-9xy-3y^2=15 \end{cases}$.

Lời giải:

1. Ta thấy $x=0$ không phải là nghiệm của hệ $\Rightarrow x\neq 0$.

Đặt $y=tx$ thay vào hệ ta được: $\begin{cases} x^2(1+2t+t^2)=4 \\ x^2(-1+t+2t^2)=4 \end{cases} \Rightarrow \frac{t+1}{2t-1}=1 \Leftrightarrow t=2$.

* $t=2 \Leftrightarrow y=2x$ thay vào hệ: $9x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm\frac{2}{3}$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left(\pm\frac{2}{3};\pm\frac{4}{3}\right)$.

2. Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ.

Với $x\neq 0$, đặt $y=tx$, $t\in$ ¡ .

Hệ cho trở thành: $\begin{cases} 3x^2+5x(tx)-4(tx)^2=38 \\ 5x^2-9x(tx)-3(tx)^2=15 \end{cases}$ hệ này viết lại:

$$\begin{cases} x^2\left(3+5t-4t^2\right)=38 \\ x^2\left(5-9t-3t^2\right)=15 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} x^2\left(3+5t-4t^2\right)=38 & (1) \\ \dfrac{3+5t-4t^2}{5-9t-3t^2}=\dfrac{38}{15} & (2) \end{cases}$$

Quy đồng mẫu số phương trình (2) và rút gọn ta được:

$54t^2+417t-145=0$, giải phương trình này ta được 2 nghiệm:

$t=-\dfrac{145}{18}$ hoặc $t=\dfrac{1}{3}$.

Với $t=\dfrac{1}{3}$ thế thì $x^2=\dfrac{38}{3+5t-4t^2}=9$ tức $x=-3$ hoặc $x=3$.

Với $t=-\dfrac{145}{18}$ tương tự trên, trường hợp này không thỏa.

Vậy hệ đã cho có nghiệm là: $(x;y)=(-3;-1)$, $(3;1)$.

Ví dụ 4.4.2. Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} (x-y)^2y=2 \\ x^3-y^3=19 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x^2-xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=65 \\ (x^2+xy+y^2)\sqrt{x^2+y^2}=185 \end{cases}$.

Lời giải:

1. Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y=tx$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases} x^3(1-t)^2t=2 \\ x^3(1-t^3)=19 \end{cases} \Rightarrow \frac{1-t^3}{t(1-t)^2}=\frac{19}{2} \Leftrightarrow \frac{t^2+t+1}{t(1-t)}=\frac{19}{2}$$

$\Leftrightarrow 21t^2-17t+2=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{2}{3}, t=\dfrac{1}{7}$.

* $t=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow y=\dfrac{2}{3}x$ thay vào hệ ta có: $\dfrac{19}{27}x^3=19 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow y=2$.

* $t=\dfrac{1}{7} \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{7}x$ thay vào hệ ta có: $\dfrac{342}{343}x^3=19 \Leftrightarrow x=\dfrac{7}{\sqrt[3]{18}} \Rightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{18}}$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(3;2)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{18}};\dfrac{7}{\sqrt[3]{18}}\right)$.

2. Vì x = 0 không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y=tx$, ta được:

$\dfrac{t^2-t+1}{t^2+t+1}=\dfrac{13}{37} \Leftrightarrow 12t^2-25t+12=0 \Leftrightarrow t=\dfrac{4}{3}; t=\dfrac{3}{4}$.

* $t=\dfrac{3}{4} \Leftrightarrow y=\dfrac{3}{4}x \Rightarrow \dfrac{65}{64}x^2\sqrt{x^2}=65 \Leftrightarrow x=\pm4 \Rightarrow y=\pm3$.

* $t=\dfrac{4}{3} \Leftrightarrow y=\dfrac{4}{3}x \Rightarrow \dfrac{65}{27}x^2\sqrt{x^2}=65 \Leftrightarrow x=\pm3 \Rightarrow y=\pm4$.

Vậy hệ có bốn cặp nghiệm: $(\pm3;\pm4)$, $(\pm4;\pm3)$.

Ví dụ 4.4.3. Giải các hệ phương trình sau:

1. $\begin{cases} x^3+y^3-xy^2=1 \\ 4x^4+y^4=4x+y \end{cases}$

2. $\begin{cases} \left(3-\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y}=\dfrac{101}{17} \\ \left(3+\dfrac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x}=\dfrac{103}{17} \end{cases}$.

Lời giải.

1. Từ hệ phương trình $\Rightarrow (x^3+y^3-xy^2)(4x+y)=4x^4+y^4$.

Đặt $x=ty$ (do $y\neq 0$).

Ta có: $y^4(t^3+1-t)(4t+1)=y^4(4t^4+1)\Rightarrow t^3-4t^2+3t=0 \Leftrightarrow t=0, t=1, t=3$

* $t=0\Rightarrow x=0\Rightarrow \begin{cases} y^3=1 \\ y^4=y \end{cases} \Leftrightarrow y=1$.

* $t=1\Rightarrow y=x\Rightarrow \begin{cases} x^3=1 \\ 5x^4=5x \end{cases} \Leftrightarrow x=1=y$

* $t=3\Rightarrow x=3y\Rightarrow \begin{cases} 25y^3=1 \\ 325y^4=13y \end{cases} \Leftrightarrow y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}}\Rightarrow x=\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}$.

Thử lại ta thấy nghiệm của hệ là: $(0;1)$, $(1;1)$, $\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{25}};\dfrac{3}{\sqrt[3]{25}}\right)$.

2. Điều kiện: $x>0, y>0$

Hệ phương trình đã cho viết lại: $\begin{cases} 3-\dfrac{5}{y+42x}=\dfrac{101}{17\sqrt{2y}} \quad (a) \\ 3+\dfrac{5}{y+42x}=\dfrac{103}{17\sqrt{x}} \quad (b) \end{cases}$, hệ phương trình

này tương đương với hệ: $\begin{cases} 6=\dfrac{101}{17\sqrt{2y}}+\dfrac{103}{17\sqrt{x}} & (b)+(a) \\ \dfrac{10}{y+42x}=\dfrac{103}{17\sqrt{x}}-\dfrac{101}{17\sqrt{2y}} & (b)-(a) \end{cases}$

Nhân vế theo vế của 2 phương trình trên ta được: $\dfrac{60}{y+42x}=\dfrac{103^2}{17^2.x}-\dfrac{101^2}{17^2.2y}$,

quy đồng mẫu số và rút gọn ta được $2.(103y)^2+84.6275xy-42.(101x)^2=0$,

phương trình này được phân tích thành: $(2y-x)\left(103^2y+101^2.42x\right)=0$ suy ra $x=2y$ vì $103^2y+101^2.42x>0$ với $x>0, y>0$.

Thay $x = 2y$ vào phương trình (b) ta được: $3 + \dfrac{5}{y + 42(2y)} = \dfrac{103}{17\sqrt{2y}}$, quy đồng mẫu số và rút gọn phương trình: $51y - \dfrac{103}{\sqrt{2}}\sqrt{y} + 1 = 0$, phương trình này tương đương với: $\left(\sqrt{y} - \sqrt{2}\right)\left(51\sqrt{y} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$ tức $y = 2$ hoặc $y = \dfrac{1}{5202}$.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(4;2)$, $\left(\dfrac{1}{2601};\dfrac{1}{5202}\right)$.

Ví dụ 4.4.4. Tìm a để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 \ge 3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 \le \dfrac{2a-1}{2a+5} \end{cases} \quad \text{(I).}$$

Lời giải:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 \le -3 \\ 21x^2 + 12xy + 6y^2 \le 3 - \dfrac{18}{2a+5} \end{cases} \Rightarrow 16x^2 + 16xy + 4y^2 \le -\dfrac{18}{2a+5}$

$$\Leftrightarrow (4x + 2y)^2 \le -\frac{18}{2a+5} \Rightarrow 2a + 5 < 0 \Leftrightarrow a < -\frac{5}{2}.$$

Ta xét hệ : $\begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 = -3 \\ 21x^2 + 12xy + 6y^2 = 3 \end{cases}$ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} -5x^2 + 4xy - 2y^2 = -3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 = 1 \end{cases}$.

Đặt $y = tx$ (do $x \ne 0$), ta có: $\dfrac{-5t^2 + 4t - 2}{7t^2 + 4t + 2} = -3$

$$\Leftrightarrow 16t^2 + 16t + 4 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2y.$$

Thay vào hệ ta được: $7x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{7}} \Rightarrow y = m\dfrac{2}{\sqrt{7}}$.

Ta chứng minh với $a < -\dfrac{5}{2}$ thì hệ (I) có nghiệm.

Thật vậy gọi $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ (*) khi đó ta có:

$\begin{cases} -5x_0^2 + 4x_0y_0 - 2y_0^2 = -3 \\ 21x_0^2 + 12x_0y_0 + 6y_0^2 = 3 < 3 - \dfrac{18}{2a+5} \end{cases} \Rightarrow (x_0;y_0)$ là một cặp nghiệm của hệ (I)

Vậy $a < -\dfrac{5}{2}$ là những giá trị cần tìm.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 4.4.1. Giải các hệ sau

1. $\begin{cases} 3x^2+5xy-4y^2=38 \\ 5x^2-9xy-3y^2=15 \end{cases}$

2. $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2)=3 \\ (x+y)(x^2+y^2)=15 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2y(x^2-y^2)=3x \\ x(x^2+y^2)=10y \end{cases}$

4. $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 3x^3-y^3=\dfrac{1}{x+y} \end{cases}$

5. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=3(x-y) \\ x^2+xy+y^2=7(x-y)^2 \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1+\dfrac{1}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt{7y}\left(1-\dfrac{1}{x+y}\right)=4\sqrt{2} \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^3-8x=y^3+2y \\ x^2-3=3(y^2+1) \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

1. Ta thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ. Đặt $x=ty$ thay vào hệ ta có :

$$\begin{cases} y^2(3t^2+5t-4)=38 \\ y^2(5t^2-9t-3)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=\dfrac{38}{3t^2+5t-4} \quad (1) \\ \dfrac{3t^2+5t-4}{5t^2-9t-3}=\dfrac{38}{15} \quad (2) \end{cases}$$

Ta có : $(2) \Leftrightarrow 145t^2-417t-54=0 \Leftrightarrow t=3, t=-\dfrac{18}{145}$.

- $t=3$ thay vào (1) ta có $y^2=1 \Leftrightarrow y=\pm 1, x=\pm 3$
- $t=-\dfrac{18}{145}$ thay vào (1) ta có : $y^2=-\dfrac{21025}{2531}$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ là : $(x;y)=(3;1),\ (-3;-1)$.

2. Từ hệ ta suy ra $x+y\neq 0$ nên ta có :

$$\frac{(x-y)(x^2-y^2)}{(x+y)(x^2+y^2)}=\frac{1}{5} \Leftrightarrow 5(x-y)^2=x^2+y^2 \Leftrightarrow 2x^2-5xy+2y^2=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2y)(2x-y)=0 \Leftrightarrow x=2y, y=2x.$$

- $x=2y$ thay vào hệ ta có : $y.3y^2=3 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=2$
- $y=2x$ thay vào hệ ta có : $-x.(-3x^2)=3 \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=2$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(1;2),\ (2;1)$.

3. Ta thấy $x = y = 0$ là một cặp nghiệm của hệ.

   Từ phương trình thứ hai của hệ $\Rightarrow xy \ge 0$.

   Đặt $x = ty\ (y \ne 0) \Rightarrow t \ge 0$ ta có: $\begin{cases} 2y^3(t^2-1) = 3ty \\ y^3t(t^2+1) = 10y \end{cases}$

   $\Rightarrow 3t^4 - 17t^2 + 20 = 0 \Leftrightarrow t = 2; t = \sqrt{\dfrac{5}{3}}$.

   $\Rightarrow (x;y) = (\pm 2;\pm 1),\ \left(\pm\dfrac{\sqrt{5\sqrt{15}}}{2};\pm\dfrac{\sqrt{3\sqrt{15}}}{2}\right).$

4. Điều kiện : $x + y \ne 0$

   Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x^2+y^2\right)^2 = 1 \\ (3x^3-y^3)(x+y) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 1 \\ (3x^3-y^3)(x+y) = (x^2+y^2)^2 \ (*) \end{cases}$

   Đặt $x = ty$, khi đó (*) trở thành :

   $(3t^3-1)(t+1) = (t^2+1)^2 \Leftrightarrow 2t^4 + 3t^3 - 2t^2 - t - 2 = 0$

   $\Leftrightarrow (t-1)(2t^3 + 5t^2 + 3t + 2) = 0 \Leftrightarrow t = 1, t = -2$.

- $t = 1 \Rightarrow x = y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- $t = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2y \\ y = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{cases}$.

5. Ta có : $x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \Leftrightarrow 2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x = 2y, y = 2x$

   Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ : $(x;y) = (0;0), (2;1), (-1;-2)$.

   Cách 2 : Ta có: $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 3(x-y) \\ x^2 + xy + y^2 = 7(x-y)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 - 3xy = 3(x-y) \\ xy = 2(x-y)^2 \end{cases}$

   Đặt $u = x - y, v = xy$. Hệ trở thành

   $\begin{cases} u^2 - 3u + v = 0 \\ v = 2u^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} u = 1 \\ v = 2 \end{cases}$.

   Từ đó giải được các nghiệm của hệ là $(x;y) = (0;0), (2;1), (-1;-2)$.

6. Điều kiện : $x, y \ge 0$.

   Vì x = 0 hay y = 0 không là nghiệm của hệ nên ta có:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{2}{\sqrt{3x}} \\ 1-\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (1) \\ \dfrac{1}{x+y}=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}} & (2) \end{cases}$.

Nhân (1) với (2) ta được: $\dfrac{1}{x+y}=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{3x}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7y}}\right)=\dfrac{1}{3x}-\dfrac{8}{7y}$

$\Leftrightarrow 21xy=(x+y)(7y-24x) \Leftrightarrow 24x^2+38xy-7y^2=0$

$\Leftrightarrow (6x-y)(4x+7y)=0 \Leftrightarrow y=6x$ (Do $x,y>0$).

Thay vào (1) ta có: $1=\dfrac{1}{\sqrt{3x}}+\dfrac{2}{\sqrt{21x}} \Leftrightarrow x=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{21} \Rightarrow y=6x=\dfrac{22+8\sqrt{7}}{7}$

Thử lại hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ có cặp nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=\dfrac{11+4\sqrt{7}}{21} \\ y=\dfrac{22+8\sqrt{7}}{7} \end{cases}$.

7. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3-y^3=8x+2y \\ x^2-3y^2=6 \end{cases} \Rightarrow 6(x^3-y^3)=(8x+2y)(x^2-3y^2)$

$\Leftrightarrow 3x^3-3y^3=4x^3-12xy^2+x^2y-3y^3 \Leftrightarrow x\left(x^2+xy-12y^2\right)=0$

$\Leftrightarrow x(x+4y)(x-3y)=0$.

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là:

$(x;y)=\left\{(3;1);(-3;-1);\left(\dfrac{4\sqrt{78}}{13};-\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right);\left(-\dfrac{4\sqrt{78}}{13};\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)\right\}$

Bài 4.4.2. Tìm a để các hệ phương trình sau có nghiệm :

1) $\begin{cases} 3x^2+3xy+y^2\le 1 \\ 5x^2+7xy+2y^2\ge \dfrac{3a+1}{a+2} \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x^2+10xy-5y^2\le -2 \\ x^2+2xy-7y^2\le \dfrac{1-a}{a+1} \end{cases}$.

Hướng dẫn giải

1) * Giả sử hệ có nghiệm $(x;y)$ hay .

$\begin{cases} 5x^2-4xy+2y^2\ge 3 \\ 7x^2+4xy+2y^2\le \dfrac{2a-1}{2a+5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-4xy+2y^2\ge 3 \\ -21x^2-12xy-6y^2\ge -3\dfrac{2a-1}{2a+5} \end{cases}$

$\Rightarrow -(4x+2y)^2\ge \dfrac{18}{2a+5}$ suy ra $2a+5<0 \Rightarrow a<-\dfrac{5}{2}$

* Với $a < -\frac{5}{2}$ ta có: $\frac{2a-1}{2a+5} = 1 - \frac{6}{2a+5} > 1$.

Ta xét hệ phương trình : $\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 = 3 & (1) \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 = 1 & (2) \end{cases}$

$(1)(2)$ Có nghiệm thì hệ có nghiệm vì mọi nghiệm $(1)(2)$ đều là nghiệm của hệ đã cho.

Xét hệ (1) (2): $\begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 = 3 \\ 7x^2 + 4xy + 2y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 - 4xy + 2y^2 = 3 \\ -(4x+2y)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}y \\ x^2 = \frac{1}{7} \end{cases}$

hệ có nghiệm. Vậy $a < -\frac{5}{2}$ là giá trị cần tìm.

2) * Giải sử hệ có nghiệm (x; y), tức là:

$$\begin{cases} 5x^2 + 7xy + 2y^2 \ge \frac{3a+1}{a+2} \\ 3x^2 + xy + y^2 \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2 + 7xy + 2y^2 \ge \frac{3a+1}{a+2} \\ -9x^2 - 3xy - 3y^2 \ge -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -4x^2 + 4xy - y^2 \ge -\frac{5}{a+2} \Rightarrow (2x-y)^2 \le \frac{5}{a+2} \Rightarrow a+2 > 0 \Rightarrow a > -2$$

Kết quả: $a > -2$.

§ 5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG MẪU MỰC

Khi giải hệ phương trình, dù bạn có dùng cách gì biến đổi đi chăng nữa thì mục đích cuối cùng của bạn cũng chuyển về phương trình một biến và giải phương trình vừa thu được. Đó cũng là suy nghĩ tự nhiên, việc làm giảm biến là quy luật không chỉ trong toán học mà cả trong cuộc sống chúng ta vẫn thường làm. Tóm lại, khi giải hệ phương trình thì chúng ta phải tìm cách làm giảm số ẩn của hệ để thuận lợi trong việc giải nó. Sau đây tôi xin nêu một số kinh nghiệm mà tôi có được trong quá trình học tập và giảng dạy.

1) Rút thế: Từ một phương trình rút một ẩn (hoặc biểu thức) theo ẩn còn lại (theo một nhóm biểu thức khác).

Nếu trong phương trình của hệ mà có một ẩn xuất hiện dưới dạng bậc nhất, thì ta có thể rút ẩn đó theo ẩn còn lại và thế vào phương trình thứ hai của hệ và bạn cũng đừng ngần ngại khi thấy rằng sau khi thực hiện phép thế, phương trình thu được có bậc không nhỏ.

Ví dụ 4.5.1. Giải hệ phương trình $\begin{cases} 2x^3 + y(x+1) = 4x^2 \\ 5x^4 - 4x^6 = y^2 \end{cases}$.

Lời giải.

Vì phương trình thứ nhất của hệ chỉ chứa y nên ta nghĩ đến việc rút y theo x và thế vào phương trình thứ hai của hệ.

Ta có: $y = \dfrac{2x^2(2-x)}{x+1}$ (Do $x = -1$ không là nghiệm của hệ) thay vào phương trình thứ hai của hệ ta có :

$$x^4\left(5-4x^2\right) = \frac{4x^4(2-x)^2}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (5-4x^2)(x^2+2x+1) = 4(4-4x+x^2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 26x + 11 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ (x-1)(2x-1)(2x^2+7x+11) = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = 1 \Rightarrow y = 1 \\ x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm: $(x;y) = (0;0),\ (1;1),\ \left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$.

Bình luận: Cách giải này có một ưu điểm là không cần phải “mánh khóe” gì cả mà chỉ cần biến đổi hết sức bình thường. Tuy nhiên, nó có một nhược điểm là nó chỉ giúp chúng ta giải quyết bài toán đó thôi, còn con đường để sáng tác ra bài toán đó thì cách giải trên không thể làm rõ được! Để hiểu rõ được nguồn gốc của bài toán và đó là cách mà tác giả đã sáng tác bài toán trên.

Cách giải thứ 2. Ta viết lại hệ như sau $\begin{cases} 2x^3 + y(x+1) = 4x^2 \\ y^2 + 4x^6 = 5x^4 \end{cases}$

Nhận thấy $x = 0 \Rightarrow y = 0$, hay $(x;y) = (0;0)$ là một nghiệm của hệ.

Với $x \neq 0$ ta có hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + \dfrac{y}{x^2}(x+1) = 4 \\ \left(\dfrac{y}{x^2}\right)^2 + 4x^2 = 5 \end{cases}$.

Đặt $a = 2x, b = \dfrac{y}{x^2}$ ta có được hệ: $\begin{cases} a + b(\frac{a}{2}+1) = 4 \\ a^2 + b^2 = 5 \end{cases}$

Đây là hệ đối xứng loại 1. Việc giải hệ này không mấy khó khăn.

Qua lời giải trên, ta thấy con đường để chế tác ra những hệ kiểu này là xuất phát từ một hệ đã biết thuật giải, chúng ta thay thế hình thức của các biến có mặt trong hệ và biến đổi rút gọn ta thu được một hệ có hình thức hoàn toàn xa lạ với cái hệ ban đầu.

Chẳng hạn: Từ hệ $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$

(lưu ý hệ này có ít nhất 1 cặp nghiệm $(1;2)$)

Ta thay thế x bằng $\dfrac{y}{2x^3}$ và y bằng y^2 thì ta có hệ:

$$\begin{cases} \dfrac{y}{2x^3}+y^2+\dfrac{y^3}{2x^3}=5 \\ \dfrac{y^2}{4x^6}+y^4=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^2+2x^3y+1)=10x^3 \\ y^2(1+4x^6y^2)=20x^6 \end{cases}.$$

Vậy ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases} y(y^2+2x^3y+1)=10x^3 \\ y^2(1+4x^6y^2)=20x^6 \end{cases}$.

Ví dụ 4.5.2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^2-2xy+x+y=0 & (1) \\ x^4-4x^2y+3x^2+y^2=0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Nhận thấy phương trình thứ nhất của hệ là phương trình bậc nhất đối với x nên ta rút x theo y và thế vào phương trình thứ hai ta được phương trình một ẩn.

Từ (1), suy ra $y=\dfrac{x^2+x}{2x-1}$ (do $x=\dfrac{1}{2}$ không là nghiệm của hệ) thay vào (2) ta

được: $x^4-4x^2\dfrac{x^2+x}{2x-1}+3x^2+\left(\dfrac{x^2+x}{2x-1}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ f(x)=0 \end{array}\right.$

Với $f(x)=x^2(2x-1)^2-4(x^2+x)(2x-1)+3(2x-1)^2+(x+1)^2$

$=4x^4-12x^3+10x^2-6x+4$

Nên $f(x)=0 \Leftrightarrow 2x^4-6x^3+5x^2-3x+2=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(2x^2+1)=0 \Leftrightarrow x=1, x=2$

Vậy hệ đã cho có 3 cặp nghiệm $(x;y)=(0;0),\ (1;2),\ (2;2)$.

Bình luận: Cũng như ở ví dụ 1, cách giải trên chỉ giải quyết được bài toán chứ không phải là con đường để sáng tác bài toán đó. Điều này thôi thúc

chúng ta đi tìm một lời giải khác cho bài toán trên. Sự xuất hiện x^2-2xy và x^4-4x^2y gợi cho ta nghĩ đến các hằng đẳng thức:

Ta viết lại hệ như sau: $\begin{cases}(x-y)^2+x+y-y^2=0\\(x^2-y)^2+3x^2-3y^2=0\end{cases}$

Việc làm này cũng không mấy khả quan, vì khi nhìn vào hệ chúng ta cũng chưa phát hiện được mối liên hệ nào. Bắt chước cách làm ở ví dụ 1 ta biến đổi như sau:

Nếu $x=0\Rightarrow y=0$ là nghiệm của hệ

Nếu $x\neq 0$, ta có hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}x-2y+1+\dfrac{y}{x}=0\\x^2-4y+\dfrac{y^2}{x^2}+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+\dfrac{y}{x}=2y+1\\(x+\dfrac{y}{x})^2=6y-3\end{cases}$

Suy ra $(2y+1)^2=6y-3$. Đến đây thì bài toán trở nên đơn giản.

Với cách giải trên, ta có thể chế được rất nhiều hệ phương trình khác nhau. Ở đây chúng ta chú ý rằng việc giải hệ cuối cùng quy về giải các phương trình bậc hai nên chuyện các hệ số nhận những giá trị nào không quan trọng.

Chẳng hạn từ: $\begin{cases}x+\dfrac{2y}{x}=4x+4\\\left(x+\dfrac{2y}{x}\right)^2=x^2-3\end{cases}$, biến đổi ngược ta có được một hệ:

Hoặc là $\begin{cases}x-\dfrac{y}{x}=4y-1\\\left(x-\dfrac{y}{x}\right)^3=2y\end{cases}$ biến đổi ngược ta có được một hệ.

Ở hai bài trên chúng ta giải theo cách rút một ẩn theo ẩn kia. Dấu hiệu nhận thấy là việc xuất hiện của một phương trình là phương trình bậc nhất đối với một ẩn. Bây giờ chúng ta chuyển qua xét một số hệ mà chúng ta thực hiện rút thế mà phương trình đối với một ẩn trong một phương trình nào đó không phải là phương trình bậc nhất.

Ví d**ụ** 4.5.3. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3-8x=y^3+2y & (1)\\x^2-3=3(y^2+1) & (2)\end{cases}$

Lời giải.

* Cách 1: Từ (2) ta suy ra: $x^2=3(y^2+2)$ (3), thay vào (1) ta được:

$$x^3 - 8x = y(y^2 + 2) = y\frac{x^2}{3} \Leftrightarrow x(3x^2 - xy - 24) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \dfrac{3x^2 - 24}{x} \end{array}\right.$$

- $x = 0$ thay vào (3) ta thấy phương trình vô nghiệm.
- $y = \dfrac{3x^2 - 24}{x}$ thay vào (3) ta được: $x^2 = 3\left(\dfrac{3x^2 - 24}{x}\right)^2 + 6$

$$\Leftrightarrow 13x^4 - 213x^2 + 864 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 9 \\ x^2 = \dfrac{96}{13} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pm 3 \Rightarrow y = \pm 1 \\ x = \pm\sqrt{\dfrac{96}{13}} \Rightarrow y = \mp\dfrac{\sqrt{78}}{13} \end{array}\right.$$

Vậy hệ có 4 cặp nghiệm là: $(x;y) = (\pm 3;\pm 1)$, $\left(\pm\sqrt{\dfrac{96}{14}};\mp\dfrac{\sqrt{78}}{13}\right)$.

Bình luận: Việc chúng ta suy nghĩ đến rút thế là nhận thấy ở phương trình thứ nhất chỉ chứa y^3 và y; ở phương trình thứ hai của hệ lại chứa y^2 nên nếu ta thay y^2 vào phương trình thứ nhất thì phương trình thứ nhất của hệ trở thành phương trình bậc nhất đối với ẩn y và ta thực hiện rút y như trên. Tuy nhiên, có lẽ đây cũng không phải là con đường chế tác bài toán trên. Từ nhận xét trên, ta thấy ở phương trình thứ nhất hai biến x, y lệch bậc nhau 2 bậc (x^3 và x; y^3 và y), đồng thời phương trình thứ hai cũng lệch bậc nhau 2 bậc (x^2, y^2 và hằng số). Điều này gợi ý ta tạo ra sự đồng bậc như sau:

* Cách 2: Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - y^3 = 8x + 2y \\ 6 = x^2 - 3y^2 \end{cases}$, suy ra $6(x^3 - y^3) = (8x + 2y)(x^2 - 3y^2)$.

Đây là phương trình đẳng cấp bậc 3. Việc còn lại để giải quyết hệ không còn khó khăn nữa.

Với cách làm như trên ta có thể chế tác ra nhiều bài toán về hệ phương trình Chẳng hạn, từ phương trình : $(x - 2y)(x + 3y)(x - 1) = 0$ nhân bung ra rồi tách thành hai phương trình ta sẽ được một hệ.

Ví dụ 4.5.4. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 3xy^2 = -49 & (1) \\ x^2 - 8xy + y^2 = 8y - 17x & (2) \end{cases}$.

Lời giải

* Cách 1: Ta thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của hệ nên từ (1)

$\Rightarrow y^2 = -\dfrac{x^3 + 49}{3x}$ (*) thế vào phương trình (2) ta được:

$$x^2-8xy-\frac{x^3+49}{3x}=8y-17\Leftrightarrow 24y(x^2+x)=2x^3+51x^2-49$$

$$\Leftrightarrow 24xy(x+1)=(x+1)(2x^2+49x-49)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ y=\dfrac{2x^2+49x-49}{24x}\end{array}\right.$$

- $x=-1$ thế vào (*) $\Rightarrow y=\pm 4$.
- $y=\dfrac{2x^2+49x-49}{24x}$ thế vào (*), ta có:

$$-\frac{x^3+49}{3x}=\left(\frac{2x^2+49x-49}{24x}\right)^2\Leftrightarrow -192x(x^3+49)=(2x^2+49x-49)^2$$

Biến đổi rút gọn ta được:

$4x^4+4x^3+45x^2+94x+49=0\Leftrightarrow (x+1)^2(4x^2-4x+49)=0\Leftrightarrow x=-1$.

Vậy hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(-1;\pm 4)$.

* Cách 2: Lấy $(1)+3.(2)$ ta có được:

$$x^3+3x^2+3xy^2-24xy+3y^2=24y-51x-49$$

$$\Leftrightarrow x^3+3x^2+3x+1+3y^2(x+1)-24y(x+1)+48(x+1)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left((x+1)^2+3y^2-24y+48\right)=0\Leftrightarrow x=-1$$

Đến đây bài toán trở nên đơn giản.

* Cách 3: Đặt $a=x+y,\ b=x-y\Rightarrow x=\dfrac{a+b}{2},y=\dfrac{a-b}{2}$

Thay vào hệ ta có được: $\begin{cases}a^3+b^3+98=0 & (3)\\ 3a^2-5b^2-9a-25b=0 & (4)\end{cases}$

Lấy $(3)-3.(4)$ ta có: $a^3-9a^2+27a-27+b^3+15b^2+75b+125=0$

$\Leftrightarrow (a-3)^3+(b+5)^3=0\Leftrightarrow a-3=-b-5$. Đến đây bài toán trở nên đơn giản.

* Cách 4: Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ nên ta đặt $y=tx$.

Khi đó hệ trở thành: $\begin{cases}x^3(1+3t^2)=-49\\ x^2(1-8t+t^2)=x(8t-17)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3=\dfrac{-49}{1+3t^2}=\dfrac{-49}{49+3(t^2-16)}=\dfrac{-49}{49+3a}\\ x=\dfrac{8t-17}{t^2-8t+1}=\dfrac{8t-17}{(t^2-16)-(8t-17)}=\dfrac{b}{a-b}\end{cases}$$ (Với: $a=t^2-16;b=8t-17$).

$$\Rightarrow \frac{-49}{49+3a} = \frac{b^3}{(a-b)^3} \Leftrightarrow 49\left(b^3+(a-b)^3\right)+3ab^3=0$$

$$\Leftrightarrow a\left[49\left(b^2-b(a-b)+(a-b)^2\right)+3b^3\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \Leftrightarrow t^2=16 \\ 49\left(b^2-b(a-b)+(a-b)^2\right)+3b^3=0\ (*) \end{array}\right..$$

- $t^2=16$ vào hệ $\Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=\pm 4$.
- Khai triển và rút gọn, ta có:

  $(*) \Leftrightarrow 49t^4+360t^3+547t^2-360t+304=0$

  $\Leftrightarrow (t+4)^2(49t^2-32t+19)=0 \Leftrightarrow t=-4$.

Bình luận:

- Với cách giải thứ nhất, chỉ đòi hỏi chúng ta kĩ năng tính toán và cách giải này cũng chỉ giải quyết được vấn đề là giải được bài toán đó mà thôi.
- Cách giải thứ 2 là cách giải ngắn gọn nhất, tuy nhiên để nghĩ ra được cách giải đó chúng ta cần có một sự nhạy cảm nhất định. Nguồn gốc của cách giải này theo tôi nghĩ là xuất phát từ việc chúng ta đoán được hệ có nghiệm $x=-1$ nên chúng ta tạo ra thừa số $x+1$.

  Ở phương trình thứ 2 thì $-8xy$ bắt cặp với $-8y$ sẽ tạo ra thừa số $x+1$. Vấn đề còn lại là $3xy^2$ và y^2. Hai đại lượng này bắt cặp với nhau để tạo ra thừa số $x+1$ thì bắt buộc ta nhân vào đại lượng y^2 với một số là 3. Đó là lí do mà ta đã nhân phương trình (2) với 3 rồi cộng với phương trình (1).

  Với cách giải này, có thể giúp chúng ta chế tác ra nhiều bài hệ. Chẳng hạn, hai bài sau là kết quả của việc làm đó.

Bài 1. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+2xy^2=5 \\ 2x^2+xy+y^2=4x+y \end{cases}$

Bài 2. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3+y^2=(x-y)(xy-1) \\ x^3-x^2+y+1=xy(x-y+1) \end{cases}$

- Con đường để đi đến cách giải thứ 3 có lẽ là như sau.

  Do ở phương trình thứ nhất có sự xuất hiện x^3, $3xy^2$ và ở phương trình thứ hai có sự xuất hiện x^2, xy, y^2 nên gợi ý cho chúng ta phân tích qua hai đại lượng $x-y$ và $x+y$

  Ta có: $x^3+3xy^2=a(x+y)^3+b(x-y)^3$. Đồng nhất hai vế ta có $a=b=\frac{1}{2}$

$x^2-8xy+y^2=a(x+y)^2+b(x-y)^2$.

Đồng nhất hai vế ta có: $\begin{cases} a+b=1 \\ a-b=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\dfrac{5}{2} \\ a=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$

$8y-17x=a(x-y)+b(x+y)$. Đồng nhất, ta có $\begin{cases} a+b=-17 \\ -a+b=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{25}{2} \\ b=-\dfrac{9}{2} \end{cases}$

Nên ta viết lại hệ như sau: $\begin{cases} (x+y)^3+(x-y)^3=-98 \\ -3(x+y)^2+5(x-y)^2=-25(x-y)-9(x+y) \end{cases}$

Và đến đây, để đơn giản về mặt hình thức ta đặt $a=x+y, b=x-y$.

Ta có hệ: $\begin{cases} a^3+b^3+98=0 \\ 3a^2-5b^2-9a-25b=0 \end{cases}$ (*)

- Cách giải thứ 4 được dựa vào cách giải của hệ đẳng cấp, tuy nhiên cách giải này với cách giải thứ nhất chỉ giúp chúng ta giải quyết được bài toán và đòi hỏi phải tính toán nhiều.

Ví dụ 4.5.5. Tìm m để hệ phương trình sau có nghiệm: $\begin{cases} 2x-y+m=0 & (1) \\ y+\sqrt{xy}=2 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Ta thấy (2) là phương trình không chứa tham số nên ta sẽ giải quyết (2) trước

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \sqrt{xy}=2-y \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 2 \\ x=\dfrac{y^2-4y+4}{y} \end{cases}$.

Thay vào (1) ta được: $\dfrac{y^2-4y+4}{y}-y+m=0 \Leftrightarrow m=\dfrac{4y-4}{y}=f(y)$ (3).

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $y\le 2$. Xét hàm số $f(y)$ với $y\le 2$

Ta có: $f'(y)=\dfrac{4}{y^2}>0 \Rightarrow f(y)$ đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;0)\cup(0;2]$

$\lim\limits_{y\to-\infty} f(y)=4;\ \lim\limits_{y\to 0^+} f(y)=-\infty;\ \lim\limits_{y\to 0^-} f(y)=+\infty$.

Ta có bảng biến thiên:

y	$-\infty$		0		2
f'(y)		+	‖	+	
f(y)	4 ↗		$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2

Suy ra hệ có nghiệm $\Leftrightarrow m \in (-\infty; 2] \cup (4; +\infty)$.

Ví dụ 4.5.6. Tìm m để hệ phương trình: $\begin{cases} 3(x+1)^2 + y - m = 0 \\ x + \sqrt{xy} = 1 \end{cases}$

có ba cặp nghiệm phân biệt .

Lời giải.

Ta có: $x + \sqrt{xy} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{xy} = 1 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 1 \\ y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} \end{cases}$

(do $x = 0$ không là nghiệm phương trình).

Thay vào phương trình thứ nhất ta được: $3x^2 + 6x + \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} = m - 3$ (a) .

Hệ có ba cặp nghiệm $\Leftrightarrow$ (a) có ba nghiệm phân biệt thỏa mãn $x \le 1$.

Xét hàm số $f(x) = 3x^2 + 6x + \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x} = 3x^2 + 7x - 2 + \dfrac{1}{x}$ với $x \le 1$.

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{6x^3 + 7x^2 - 1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1; x = -\dfrac{1}{2}; x = \dfrac{1}{3}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{1}{3}$		1
f'(x)		$-$	0	+	0	$-$	‖	$-$	0	+	
f(x)	$+\infty$	↘	-7	↗	$-\frac{27}{4}$	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↘	$\frac{11}{3}$	↗	9

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy (a) có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{11}{3} \le m - 3 \le 9 \\ -7 \le m - 3 \le -\dfrac{27}{4} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{20}{3} \le m \le 12 \\ -4 \le m \le \dfrac{-15}{4} \end{array} \right. .$$

Vậy $\frac{20}{3} \le m \le 12$ hoặc $-4 \le m \le \frac{-15}{4}$ là những giá trị cần tìm.

Ví dụ 4.5.7. Tìm tất cả giá trị của tham số a để hệ sau có nghiệm (x; y) thoả mãn điều kiện $x \ge 4$.

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 3 & (1) \\ \sqrt{x+5} + \sqrt{y+3} \le a & (2) \end{cases}.$$

Lời giải.

Điều kiện: $x, y \ge 0$

Đặt $t = \sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{y} = 3 - t$, do $\begin{cases} x \ge 4 \\ y \ge 0 \end{cases} \Rightarrow 2 \le t \le 3$.

Khi đó (2) trở thành: $a \ge \sqrt{t^2+5} + \sqrt{t^2 - 6t + 12} = f(t)$ (3).

Xét hàm số f(t) với $t \in [2;3]$, có $f'(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2+5}} + \frac{t-3}{\sqrt{t^2-6t+12}}$

$\Rightarrow f'(t) = 0 \Leftrightarrow t\sqrt{(t-3)^2+3} = (3-t)\sqrt{t^2+5}$ (*)

$\Rightarrow t^2(t-3)^2 + 3t^2 = (3-t)^2 t^2 + 5(3-t)^2 \Leftrightarrow 2t^2 - 30t + 45 = 0$

Phương trình vô nghiệm vì $t \in [2;3]$

BBT:

t	2	3
f'(t)	+	
f(t)	5 ↗	$\sqrt{14} + \sqrt{3}$

Hệ có nghiệm $\Leftrightarrow$ (3) có nghiệm $t \in [2;3] \Leftrightarrow a \ge \min\limits_{[1;2]} f(t) = f(2) = 5$.

Vậy $a \ge 5$ là những giá trị cần tìm.

2. Biến đổi về phương trình tích

Xuất phát từ một phương trình hoặc cộng trừ hai phương trình của hệ, dẫn tới một phương trình tích. Từ phương trình tích này ta có thể biểu diễn được ẩn này qua ẩn kia.

Ví dụ 4.5.8. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1 & (1) \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y & (2) \end{cases}$.

Lời giải

Điều kiện : $x + y > 0$

Phương trình thứ nhất của hệ chứa ba biểu thức $x^2+y^2;xy;x+y$, mà ba biểu thức này quan hệ với nhau bởi đẳng thức: $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy$ nên sẽ biến đổi (1) như sau:

Ta có:

$$(1)\Leftrightarrow x^2+y^2+\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{x+y}-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x^2+y^2)(x+y)-(x^2+y^2)}{x+y}+x+y-1=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-1)(\frac{x^2+y^2}{x+y}+1)=0\Leftrightarrow x+y-1=0\Leftrightarrow y=1-x \quad (\text{ Do } \frac{x^2+y^2}{x+y}>0)$$

Thay vào (2), ta được: $x^2-(1-x)=1\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1\Rightarrow y=0 \\ x=-2\Rightarrow y=3 \end{array}\right.$

Vậy hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(1;0),\ (-2;3)$.

Ví dụ 4.5.9. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} xy+x+y=x^2-2y^2 \\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Phương trình thứ nhất của hệ $\Leftrightarrow x^2-(y+1)x-2y^2-y=0$ (*)

Xem (*) là phương trình bậc hai ẩn x, còn y là tham số, phương trình này có biệt thức

$\Delta=(y+1)^2+4(2y^2+y)=(3y+1)^2$

Do đó (*) có hai nghiệm $x=2y+1, x=-y$, ta loại nghiệm $x=-y$

Thay $x=2y+1$ vào phương trình thứ hai của hệ ta tìm được $y=2\Rightarrow x=5$

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(5;2)$.

Bình luận: Khi gặp một phương trình của hệ có dạng $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$, ta có thể xem đây là một phương trình bậc hai với ẩn x (hoặc y) và y (hoặc x) là tham số. Nếu biệt thức Δ có dạng $(my+n)^2$ thì ta rút được $x=\alpha y+\beta$.

Nếu gặp hệ phương trình gồm hai phương trình bậc hai, nhưng mỗi phương trình của hệ không có tính chất nêu trên thì ta có thể nhân vào mỗi phương trình một số nào đó rồi cộng chúng lại với nhau để được một phương trình bậc hai có tính chất vừa nêu trên.

Ví dụ 4.5.10. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 2x^2 + 2xy + y = 5 \ \ (1) \\ y^2 + xy + 5x = 7 \ \ (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Nhân phương trình thứ hai của hệ với $k \neq 0$ và cộng với phương trình thứ nhất ta được:

$2x^2 + (2y + ky + 5k)x + ky^2 + y - 7k - 5 = 0 \quad (*)$

Xem (*) là phương trình bậc hai ẩn x, phương trình này có biệt thức

$\Delta_x = [(2+k)y + 5k]^2 - 8(ky^2 + y - 7k - 5)$

$\quad = (k-2)^2 y^2 + 2(5k^2 + 10k - 4)y + 25k^2 + 56k + 40$.

Ta chọn k sao cho $\Delta_x = (ay+b)^2$, tức là k thỏa mãn

$\Delta'_y = (5k^2 + 10k - 4)^2 - (k-2)^2(25k^2 + 56k + 40) = 0 \quad (**)$

Ta thấy phương trình (**) có một nghiệm $k = 1$, ta chọn giá trị này.

Khi đó $\Delta_x = y^2 + 22y + 121 = (y+11)^2$

Suy ra phương trình (*) có hai nghiệm: $x = \dfrac{-y+3}{2}; x = -y - 4$.

Thay vào hệ ta tìm được hai cặp nghiệm $(1;1), (-1;-3)$.

Ví dụ 4.5.11. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^3 + 2xy^2 = 5 \\ 2x^2 + xy + y^2 = 4x + y \end{cases}$.

Lời giải.

Nhận thấy phương trình có nghiệm $\left(1; \pm\sqrt{2}\right)$, nên ta suy nghĩ đến việc tạo ra thừa số $x - 1$.

Chú ý đến số hạng chứa y^2 ở hai phương trình, ta nghĩ đến lấy phương trình thứ nhất trừ đi 2 lần phương trình thứ hai ta có được:

$x^3 - 4x^2 + 8x - 5 + 2y^2(x-1) + y(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x + 5) + 2y^2(x-1) + y(x-1) = 0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 - 3x + 2y^2 + y + 5) = 0 \ \ (*)$

Do $x^2 - 3x + 2y^2 + y + 5 = \left(x - \dfrac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y + \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{21}{8} > 0, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

Nên $(*) \Leftrightarrow x = 1$. Từ đó ta tìm được $(x;y) = \left(1; \pm\sqrt{2}\right)$ là nghiệm của hệ.

3. Đặt ẩn phụ đưa về hệ quen thuộc

Việc đặt ẩn phụ làm cho cấu trúc của hệ nhìn đơn giản hơn, từ đó chúng ta có lời giải rõ ràng hơn. Để đặt ẩn phụ chúng ta cần tạo ra những nhóm

hạng tử đồng dạng với nhau. Để tạo ra những nhóm hạng tử này ta thường thực hiện chia hoặc ghép các hạng tử với nhau.

Ví dụ4.5.12. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 1+x^3y^3=19x^3 \\ y+xy^2=-6x^2 \end{cases}$.

Lời giải.

Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ nên hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{x^3}+y^3=19 \\ y\dfrac{1}{x^2}+y^2\dfrac{1}{x}=-6 \end{cases}$

Đặt $a=\dfrac{1}{x}$, ta có hệ: $\Leftrightarrow \begin{cases} a^3+y^3=19 \\ a^2y+y^2a=-6 \end{cases}$

Đặt $S=a+y, P=ay$.

Khi đó: $\begin{cases} S(S^2-3P)=19 \\ SP=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S=1 \\ P=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ y=-2 \end{cases} \cup \begin{cases} a=-2 \\ y=3 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(\dfrac{1}{3};-2),\ (-\dfrac{1}{2};3)$.

Bình luận.

1) Ngoài cách giải trên, ta có thể giải theo cách sau

Ta thấy $x=0$ không là nghiệm của hệ, ta biến đổi hệ như sau

$$\begin{cases} 6(1+xy)(1-xy+x^2y^2)=6.19x^3 \\ 19xy(1+xy)=-19.6x^2 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình của hệ lại ta được: $(1+xy)(6x^2y^2+13xy+25)=0$

Đến đây, bài toán trở nên đơn giản.

2) Một ví dụ tương tự như bài toán trên $\begin{cases} y+xy^2=6x^2 \\ 1+x^2y^2=5x^2 \end{cases}$.

Ví dụ 4.5.13. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2+3y^2+4xy-18x-22y+31=0 \\ 2x^2+4y^2+2xy+6x-46y+175=0 \end{cases}.$$

Lời giải.

Đặt $x=u-5; y=v+7$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+3v^2+4uv=1 & (3) \\ 2u^2+4v^2+2uv=1 & (4) \end{cases} \quad (*)$$

Hệ này có thể giải theo cách thông thường, nhưng lưu ý là trừ 2 phương trình vế theo vế ta có ngay $u^2+v^2-2uv=0 \Leftrightarrow u=v$

Ta có hệ (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} 8u^2=1 \\ u=v \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v=\dfrac{1}{2\sqrt{2}} \\ u=v=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2\sqrt{2}}-5;\dfrac{1}{2\sqrt{2}}+7\right),\left(\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}-5;\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}+7\right)$.

Chú ý: Để thực hiện được phép đặt u,v để đưa về hệ (*) như trên, ta đã thực hiện bước thử như sau

Đặt $x=u+a; y=v+b$ ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} u^2+4uv+3v^2+u(2a+4b-18)+v(6b+4a-22)+4ab+a^2+3b^2-18a-22b+31=0 \\ 2u^2+4v^2+2uv+u(4a+2b+6)+v(2a+8b-46)+2a^2+4b^2+2ab+6a-16b+175=0 \end{cases}$$

Để hệ số của u, v là 0 ta giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2a+4b-18=0 \\ 6b+4a-22=0 \\ 4a+2b+6=0 \\ 2a+8b-46=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-5 \\ b=7 \end{cases}.$$

Cách giải trên ta có thể áp dụng có một số hệ bậc hai

Ví dụ 4.5.14. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x^2+3y^2-xy-9x+8y+9=0 \\ x^2-y^2+3xy-x-8y-5=0 \end{cases}$.

Lời giải.

Đặt $x=a+2,\ y=b-1$ ta có hệ:

$$\begin{cases} 2(a+2)^2+3(b-1)^2-(a+2)(b-1)-9(a+2)+8(b-1)+9=0 \\ (a+2)^2-(b-1)^2+3(a+2)(b-1)-(a+2)-8(b-1)-5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a^2-ab+3b^2=4 \\ a^2+3ab-b^2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+3ab-b^2=2 \\ 7ab-5b^2=0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ a^2=2 \end{cases} \vee \begin{cases} a=\dfrac{5}{7}b \\ \dfrac{81}{49}b^2=2 \end{cases}$, giải các hệ này ta được $\begin{cases} b=0 \\ a=\pm\sqrt{2} \end{cases}$ và $\begin{cases} a=\pm\dfrac{5\sqrt{2}}{9} \\ b=\pm\dfrac{7\sqrt{2}}{9} \end{cases}$.

Từ đó ta suy ra được nghiệm của hệ đã cho là:

$$(x;y)\in\left\{\left(2\pm\sqrt{2};-1\right),\left(2\pm\frac{5\sqrt{2}}{9};-1\pm\frac{7\sqrt{2}}{9}\right)\right\}.$$

Ví dụ 4.5.15. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 8x^3-12x^2y-36x^2+12xy+28x-3y-3=0 \\ y^3-6xy^2+9y^2-24xy+24x+24y+25=0 \end{cases}.$$

Lời giải.

Đặt $x=\frac{a+1}{2}$ và $y=b-2$, thay vào hệ và biến đổi ta có:
$$\begin{cases} a^3-3a^2b=-4 \\ b^3-3ab^2=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3a^2b=-4 \\ (a-b)^3=1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=a-1 \\ a^3-3a^2(a-1)=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=a-1 \\ 2a^3-3a^2-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=-1 \end{cases}$.

Ví dụ 4.5.16. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2+1)y^4+1=2xy^2(y^3-1) \\ xy^2(3xy^4-2)=xy^4(x+2y)+1 \end{cases}$.

Lời giải.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2y^4+2xy^2+1+y^4-2xy^5=0 \\ 3x^2y^6-2xy^2-x^2y^4-2xy^5-1=0 \end{cases}$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2\frac{x}{y^2}+\frac{1}{y^4}-2xy=-1 \\ 3x^2y^2-\frac{2x}{y^2}-x^2-2xy-\frac{1}{y^4}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{y^2}\right)^2-2xy=-1 \\ 3x^2y^2-2xy-\left(x+\frac{1}{y^2}\right)^2=0 \end{cases}.$$

(do $y=0$ không là nghiệm của hệ)

Đặt $a=x+\frac{1}{y^2}, b=xy$, ta có hệ:
$$\begin{cases} a^2-2b=-1 \\ a^2-3b^2+2b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=2b-1 \\ 3b^2-4b+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=\pm 1 \end{cases}$$

- $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y^2}=1 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{y} \\ y^2-y-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\sqrt{5}-1}{2} \\ y=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$ v $\begin{cases} x=-\frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ y=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

- $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+\dfrac{1}{y^2}=-1 \\ xy=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{y} \\ y^2+y+1=0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=\left(\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2};\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\right)$.

Ví dụ 4.5.17. Giải hệ phương trình $\begin{cases} (x^2-1)^2+3=\dfrac{6x^5y}{x^2+2} \\ 3y-x=\sqrt{\dfrac{4x-3x^2y-9xy^2}{x+3y}} \end{cases}$.

Lời giải.

Từ phương trình thứ hai, ta có $\begin{cases} 3y\ge x \\ x+3y\ne 0 \end{cases}$

Hệ đã cho tương đương với:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x^2-2x+4)(x^2+2)=6x^5y \\ (3y-x)^2=\dfrac{4x-3x^2y-9x^2y^2}{x+3y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6+8=6x^5y \\ 9y^2-6xy+x^2=\dfrac{4x}{x+3y}-3xy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^6+8=6x^5y \\ (x^2-3xy+9y^2)(x+3y)=4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^6+8=6x^5y \\ x^3+27y^3=4x \end{cases}$$

Vì $x=0$ không là nghiệm của hệ, nên ta có: $\begin{cases} 1+\dfrac{8}{x^6}=\dfrac{6y}{x} \\ 1+\dfrac{27y^3}{x^3}=\dfrac{4}{x^2} \end{cases}$

Đặt $a=\dfrac{2}{x^2}>0,\ b=\dfrac{3y}{x}$, ta thu được hệ: $\begin{cases} 1+a^3=2b \\ 1+b^3=2a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1+a^3=2b \\ (a-b)(a^2+ab+b^2+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a^3-2a+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ (a-1)(a^2+a-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \\ a=1, a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

- $a=b=1$, ta có: $\begin{cases} \dfrac{2}{x^2}=1 \\ \dfrac{3y}{x}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=-\dfrac{\sqrt{2}}{3} \end{cases}$

- $a=b=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{2}{x^2}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\\ \dfrac{3y}{x}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\sqrt{\sqrt{5}+1}\\ y=\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\sqrt{5}-1\right)}{6}\end{cases}\ \text{v}\ \begin{cases}x=-\sqrt{\sqrt{5}+1}\\ y=-\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}+1}\left(\sqrt{5}-1\right)}{6}\end{cases}.$$

Đối chiếu điều kiện, ta có nghiệm của hệ đã cho là:

$$(x;y)=\left(\pm\sqrt{2};\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\right),\ \left(-\sqrt{\sqrt{5}+1};-\frac{(\sqrt{5}-1)\sqrt{\sqrt{5}+1}}{6}\right).$$

Ví d**ụ** 4.5.18. Giải hệ phương trình sau

$$\begin{cases}\sqrt{2x-1}-y\left(1+2\sqrt{2x-1}\right)=-8\\ y^2+y\sqrt{2x-1}+2x=13\end{cases}.$$

Lời giải.

Điều kiện: $x\ge\dfrac{1}{2}$. Đặt $t=\sqrt{2x-1}$ với $t\ge0$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases}t-y\left(1+2t\right)=-8\\ y^2+yt+t^2=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t-y-2ty=-8 & (1)\\ \left(t-y\right)^2+3ty=12 & (2)\end{cases}$$

Từ (1) và (2), suy ra $2\left(t-y\right)^2+3\left(t-y\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t-y=0\\ t-y=-\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$

- Với $t=y$, ta có: $t=y=2$. Khi đó: $\sqrt{2x-1}=2\Leftrightarrow x=\dfrac{5}{2}\Rightarrow y=2$.
- Với $y=t+\dfrac{3}{2}$, có $4t^2+6t-13=0\Leftrightarrow t=\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4}\left(\text{do } t\ge0\right)$.

Khi đó: $t=\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3}{2}+\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4}\\ \sqrt{2x-1}=\dfrac{-3+\sqrt{61}}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=\dfrac{3+\sqrt{61}}{4}\\ x=\dfrac{43-3\sqrt{61}}{16}\end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=\left(\dfrac{5}{2};2\right),\left(\dfrac{43-3\sqrt{61}}{16};\dfrac{3+\sqrt{61}}{4}\right).$

Ví dụ 4.5.19. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 6x^4-\left(x^3-x\right)y^2-\left(y+12\right)x^2=-6 \\ 5x^4-\left(x^2-1\right)^2y^2-11x^2=-5 \end{cases}$.

Lời giải.

Nhận thấy, $x=0$ không là nghiệm của hệ nên chia hai vế của mỗi phương trình cho x^2 ta được:

$$\begin{cases} 6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)y^2-y-12=0 \\ 5\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2y^2-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)y^2-y=0 \\ 5\left(x-\frac{1}{x}\right)^2-\left(x-\frac{1}{x}\right)^2y^2-1=0 \end{cases}$$

Đặt $a=x-\frac{1}{x}$, ta có hệ: $\begin{cases} 6a^2-ay^2-y=0 \\ 5a^2-a^2y^2-1=0 \end{cases}$.

Chia hai vế của hệ cho $a^2\neq 0$ ta có: $\begin{cases} \frac{y^2}{a}+\frac{y}{a^2}=6 \\ y^2+\frac{1}{a^2}=5 \end{cases}$.

Đặt $u=\frac{1}{a}$, ta có hệ: $\begin{cases} y^2u+u^2y=6 \\ u^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uy(u+y)=6 \\ (u+y)^2-2uy=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+y=3 \\ uy=2 \end{cases}$

Từ đó ta tìm được: $\begin{cases} u=1 \\ y=2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=2 \\ y=1 \end{cases}$.

- $u=1\Rightarrow a=1\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=1\Leftrightarrow x^2-x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$
- $u=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2x^2-x-2=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{17}}{4}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $\left(x;y\right)=\left(\frac{1\pm\sqrt{5}}{2};2\right),\ \left(\frac{1\pm\sqrt{17}}{4};1\right)$.

4. Phương pháp hàm số

Trong phương pháp này, chúng ta dựa vào tính đơn điệu của hàm số để thiết lập mối quan hệ giữa các ẩn.

Kịch bản mà chúng ta thường sử dụng đó là từ một phương trình của hệ hoặc cả hai phương trình ta biến đổi về dạng:

$$f(u)=f(v)\ \text{ với }\ u=u(x,y),v=v(x,y)$$

Trong đó $f(t)$ là một hàm liên tục và đồng biến hoặc nghịch biến trên khoảng mà ta đang xét.

Điểm mấu chốt trong cách giải này là tìm ra hàm đặc trưng $f(t)$.

> Ví dụ 4.5.20. Giải hệ phương trình:
> $$\begin{cases} x^3+x-2=y^3+3y^2+4y & (1) \\ x^5+y^3+1=0 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải:

Từ (1) ta có $x^3+x-2=(y+1)^3+(y+1)-2$ (*)

Xét hàm số đặc trưng: $f(t)=t^3+t-2$ có $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$

Suy ra $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, Kết hợp với (*) ta được $x=y+1$

Thế vào (2) suy ra:

$$x^5+(x-1)^3+1=0\Leftrightarrow x^5+x^3-3x^2+3x=0\Leftrightarrow x(x^4+x^2-3x+3)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x^4+x^2-3x+3=0\ (vn_0) \end{array}\right..$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0,1)$.

> Ví dụ 4.5.21. Giải hệ phương trình :
> $$\begin{cases} (x+\sqrt{1+x^2})(y+\sqrt{1+y^2})=1 & (1) \\ x\sqrt{6x-2xy+1}=4xy+6x+1 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải.

Điều kiện: $6x-2xy+1\ge 0$ (*)

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x+\sqrt{x^2+1}=-y+\sqrt{y^2+1}\Leftrightarrow f(x)=f(-y)$ với $f(t)=t+\sqrt{t^2+1}$

Lại có: $f'(t)=\dfrac{\sqrt{t^2+1}+t}{\sqrt{t^2+1}}>\dfrac{|t|-t}{\sqrt{t^2+1}}\ge 0$ do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Vậy $f(x)=f(-y)\Leftrightarrow x=-y$.

Thế vào (2) ta có: $x\sqrt{6x+2x^2+1}=-4x^2+6x+1\Leftrightarrow\left(\sqrt{2x^2+6x+1}-\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{25x^2}{4}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} \sqrt{2x^2+6x+1}=3x \\ \sqrt{2x^2+6x+1}=-2x \end{array}\right.$$

- Nếu $\sqrt{2x^2+6x+1}=3x\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2+6x+1=9x^2 \\ x\ge 0 \end{cases}\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=-1$
- Nếu $\sqrt{2x^2+6x+1}=-2x\Leftrightarrow\begin{cases} 2x^2+6x+1=4x^2 \\ x\le 0 \end{cases}\Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{11}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-3+\sqrt{11}}{2}$

Thử lại (*) ta thấy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;-1);\left(\frac{3-\sqrt{11}}{2};\frac{-3+\sqrt{11}}{2}\right)$.

Ví dụ 4.5.22: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} -1\le x\le 1 \\ 0\le y\le 2 \end{cases}$

Ta có

$$\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3-3x-2=(y-1)^3-3(y-1)-2 & (1) \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{1-(y-1)^2}+2=0 & (2) \end{cases}$$

Ta có: $y-1, x\in[-1;1]$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t-2, t\in[-1;1]$ có $f'(t)=3\left(t^2-1\right)\le 0 \Rightarrow (1)\Leftrightarrow x=y-1$

Thay vào (2) ta được: $x^2-2\sqrt{1-x^2}+2=0 \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=1$

Vậy nghiệm của hệ: $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases}$.

Ví dụ 4.5.23. Giải hệ phương trình với $x,y\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\begin{cases} e^{x-y}=\frac{\sin x}{\sin y} \\ 3\sqrt{8x^2+3}+1=6\sqrt{2y^2-2y+1}+8y \end{cases}.$$

Lời giải

Ta có : $e^{x-y}=\frac{\sin x}{\sin y}\Leftrightarrow \frac{e^x}{\sin x}=\frac{e^y}{\sin y}\Leftrightarrow f(x)=f(y)$,

Trong đó $f(t)=\frac{e^t}{\sin t}$, $t\in(0;\frac{\pi}{4})$. Hàm f(t) liên tục trên $(0;\frac{\pi}{4})$ và có

$f'(t)=\frac{e^t\cos t(\tan t-1)}{\sin^2 t}<0 \quad \forall t\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow f(t)$ là hàm nghịch biến trên $\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

$3\sqrt{8x^2+3}+1=6\sqrt{2x^2-2x+1}+8x \Leftrightarrow 3(\sqrt{8x^2+3}-2\sqrt{2x^2-2x+1})+8x-1=0$

$\Leftrightarrow \frac{3(8x-1)}{\sqrt{8x^2+3}+2\sqrt{2x^2-2x+1}}+8x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}\in(0;\frac{\pi}{4})$.

Vậy hệ có cặp nghiệm duy nhất: $x = y = \dfrac{1}{8}$.

Ví d**ụ** 4.5.24. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases}(4x^2+1)x+(y-3)\sqrt{5-2y}=0\\ 4x^2+y^2+2\sqrt{3-4x}=7\end{cases}.$$

Lời giải.

Điều kiện: $x \le \dfrac{3}{4}, y \le \dfrac{5}{2}$

Từ phương trình thứ nhất dễ dàng suy ra $x > 0$.

Đặt $\sqrt{5-2y} = 2t \ge 0$, ta được $y = \dfrac{5-4t^2}{2}$.

Thay vào phương trình đầu ta có: $x(4x^2+1) = t(4t^2+1)$

Vì hàm $f(u) = u(4u^2+1)$ đồng biến trên $\mathbb{R}^+$ nên ta có $x = t$, suy ra $y = \dfrac{5-4x^2}{2}$.

Thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$4x^2 + \frac{(5-4x^2)^2}{4} + 2\sqrt{3-4x} = 7.$$

Trong khoảng $\left(0, \dfrac{3}{4}\right]$, hàm số $g(x) = 4x^2 + \dfrac{(5-4x^2)^2}{4} + 2\sqrt{3-4x}$ có:

$$g'(x) = 4x(4x^2-3) - \frac{4}{\sqrt{3-4x}} < 4x(4x^2-3) < 0.$$

Mặt khác lại có $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 7$ vì vậy phương trình $g(x) = 7$ chỉ có một nghiệm duy nhất là $x = \dfrac{1}{2}$, suy ra $y = 2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x = \dfrac{1}{2}\\ y = 2\end{cases}$.

Chú ý: Trong một số trường hợp, chúng ta cần hạn chế miền xác định của các biến từ cấu trúc của hệ đã cho.

Ví d**ụ** 4.5.25. Giải hệ phương trình: $\begin{cases}x^3 - 3x^2 - 9x + 22 = y^3 + 3y^2 - 9y\\ x^2 + y^2 - x + y = \dfrac{1}{2}\end{cases}$.

Lời giải.

Ta có hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases}(x-1)^3-12(x-1)=(y+1)^3-12(y+1)\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=1\end{cases}$

Đặt $a=x-1, b=y+1$ ta được hệ: $\begin{cases}a^3-12a=b^3-12b\\ \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=1\end{cases}$

Từ $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(b-\frac{1}{2}\right)^2=1 \Rightarrow \begin{cases}-1\le a+\frac{1}{2}\le 1\\ -1\le b-\frac{1}{2}\le 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{3}{2}\le a\le \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}\le b\le \frac{3}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2\le \frac{9}{4}\\ b^2\le \frac{9}{4}\end{cases}$.

Xét hàm số $f(t)=t^3-12t$, ta có $f(t)$ là hàm liên tục trên ¡ và $f'(t)=3\left(t^2-4\right)<0$, với $t^2\le \frac{9}{4}$

Nên từ $a^3-12a=b^3-12b$ ta có $a=b$.

Do đó, hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases}a=b\\ \left(a+\frac{1}{2}\right)^2+\left(a-\frac{1}{2}\right)^2=1\end{cases} \Leftrightarrow a=b=\pm\frac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y)=\left(\frac{3}{2};-\frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$.

Ví dụ 4.5.26. Giải hệ phương trình $\begin{cases}x^3-3x^2+2=\sqrt{y^3+3y^2} & (1)\\ 3\sqrt{x-2}=\sqrt{y^2+8y} & (2)\end{cases}$.

Lời giải:

Điều kiện: $x\ge 2; y\ge 0$

Ta có: (1) $\Leftrightarrow x^3-3x^2+2=y\sqrt{y+3} \Leftrightarrow (x-1)^3-3(x-1)=(\sqrt{y+3})^3-3\sqrt{y+3}$

Xét hàm đặc trưng $f(t)=t^3-3t$ có $f'(t)=3t^2-3\ge 0, \forall t\ge 1$

(vì $\sqrt{y+3}\ge\sqrt{3}; x-1\ge 1$)

Suy ra hàm số đồng biến trên $[1;+\infty]$, hay $x-1=\sqrt{y+3} \Leftrightarrow y=x^2-2x-2$

Thế vào (2): (2) $\Leftrightarrow 9(x-2)=y^2+8y \Leftrightarrow 9(x-2)=(x^2-2x-2)^2+8(x^2-2x-2)$

$\Leftrightarrow x^4-4x^3+8x^2-17x+6=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x^3-x^2+5x-2)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3\\ x^3-x^2+5x-2=0\end{array}\right.$

Xét $g(x)=x^3-x^2+5x-2$ có $g'(x)=3x^2-2x+5>0,\forall x\in$ ¡ suy ra đây là một hàm đồng biến trên ¡

Lại có $x\ge 2\Rightarrow g(x)\ge g(2)=13>0$ suy ra phương trình $g(x)=0$ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $(x;y)=(3;1)$.

Ví dụ 4.5.27. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} y(1+x^2)=x\left(1+y^2\right) & (1)\\ x^2+3y^2=1 & (2)\end{cases}$.

Lời giải.

Từ phương trình (2) $\Leftrightarrow -1\le x,y\le 1$ (*) .

Từ phương trình (1) ta thấy hệ có nghiệm (x;y) thì $xy>0$ (**) do đó x,y luôn cùng dấu với nhau.

$(1)\Leftrightarrow \dfrac{1+x^2}{x}=\dfrac{1+y^2}{y}\Leftrightarrow f(x)=f(y)$ trong đó $f(t)=\dfrac{t^2+1}{t}$ với $t\in[-1;1]$.

Ta có $f'(t)=\dfrac{t^2-1}{t^2}\le 0\Rightarrow f(t)$ nghịch biến trên mỗi khoảng $[-1;0)$ và $(0;1]$

Vì x,y cùng dấu nên ta có các trường hợp sau:

* Nếu $x,y\in(0;1]\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thay vào (2) $\Rightarrow x=y=\dfrac{1}{2}$.

* Nếu $x,y\in[-1;0)\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ thay vào (2) $\Rightarrow x=y=-\dfrac{1}{2}$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y)=(\pm\dfrac{1}{2};\pm\dfrac{1}{2})$.

Bình luận:

1) Ngoài cách giải trên, ta có thể biến đổi (1) như sau:

$(1)\Leftrightarrow x+xy^2=y+x^2y\Leftrightarrow x-y+xy(y-x)=0\Leftrightarrow (x-y)(xy-1)=0$.

Từ đây kết hợp với (2) ta tìm được x,y .

2) Nếu trong hệ xuất hiện phương trình dạng $f(x;y)=f(y;x)$ thì ta có hai cách biến đổi phương trình này

Cách 1: Biến đổi về dạng $(x-y)g(x;y)=0$.

Cách 2: Biến đổi về dạng $h(x)=h(y)$, rồi ta sử dụng phương pháp hàm số. Tuy nhiên trong trường hợp này ta cần lưu ý tính chất sau của hàm đơn điệu.

"Nếu hàm số $y=f(t)$ (Có TXĐ D_f) đơn điệu trên ***tập xác định*** của nó thì $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$. Còn nếu D_f là hợp của các khoảng thì khi đó ta chỉ kết luận được là hàm số $y=f(t)$ đơn điệu trên ***từng khoảng xác định*** của nó và

khi đó từ $f(x)=f(y)$ thì ta chưa suy ra được $x=y$! mà ta chỉ suy ra được khi x,y cùng thuộc một khoảng**”**

Chẳng hạn ta xét hàm $f(x)=\dfrac{-x^2+4x-3}{x-2}$ có $f'(x)=-1-\dfrac{1}{(x-2)^2}<0$ thế nhưng $f(1)=f(3)=0$!

3) Trong cách 2 ở bài toán trên chúng ta cần phải có được hai nhận xét (*) và (**) vì có (*) ta mới kết luận được f(t) nghịch biến, có (**) ta mới xét hai trường hợp $x,y<0$ và $x,y>0$ nên từ $f(x)=f(y)$ mới có: $x=y$. Trong một số trường hợp, chúng ta không có được nhận xét để đẩy hai biến về cùng một khoảng xác định thì ta sử dụng cách biến đổi thứ nhất. Chẳng hạn, ta xét bài sau: $\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y} \\ x^3+1=2y \end{cases}$.

Ví dụ 4.5.28: Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{2x+1}-\sqrt{2y+1}=x-y & (1) \\ x^2-12xy+9y^2+4=0 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

ĐK: $x,y\ge -\dfrac{1}{2}$.

Từ (2) ta thấy nếu hệ có nghiệm (x;y) thì $x.y\ge 0$ (*)

$(1)\Leftrightarrow \sqrt{2x+1}-x=\sqrt{2y+1}-y \quad (3)$.

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{2t+1}-t$, ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2t+1}}-1\Rightarrow f'(t)=0\Leftrightarrow t=0$

$\Rightarrow$ hàm f(t) đồng biến trên $(-\dfrac{1}{2};0)$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Do (*) nên ta có các trường hợp sau

TH 1: $x,y\in[-\dfrac{1}{2};0)\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ (do f(t) đồng biến).

TH 2: $x,y\in[0;+\infty)\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$ (do f(t) nghịch biến).

Tóm lại cả hai trường hợp đều dẫn đến $x=y$, tức là $(1)\Leftrightarrow x=y$ thay vào (2) ta được: $2x^2=4\Leftrightarrow x=\sqrt{2}$ (do $x\ge -\dfrac{1}{2}$).

Vậy hệ có một cặp nghiệm : $x=y=\sqrt{2}$.

5. Phương pháp đánh giá

Để giải hệ phương trình ta có thể sử dụng phương pháp đánh giá. Thông thường ta xuất phát từ một phương trình hoặc kết hợp cả hai phương trình của hệ để ta thiết lập được một phương trình mà đó là trường hợp xảy ra dấu "=" của một bất đẳng thức. Từ đó ta tìm được mối quan hệ đơn giản hơn giữa hai ẩn. Cách làm này thường sử dụng khi các yếu tố xuất hiện trong phương trình khó có mối quan hệ biến đổi đại số.

Ví d**ụ** 4.5.29. Giải hệ phương trình : $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy}=2\sqrt{2} & (1) \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 & (2) \end{cases}$.

Lời giải.

Điều kiện: $x, y \ge 0$.

Ta có: $(x-y)^2 \ge 0 \Leftrightarrow x^2+y^2 \ge \frac{1}{2}(x+y)^2 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$

$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{2xy} \ge \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y+2\sqrt{xy}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 = 2\sqrt{2}$

(do $\sqrt{x}+\sqrt{y}=2$)

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ \sqrt{x}+\sqrt{y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=1$.

Vậy hệ đã cho có một cặp nghiệm duy nhất $x=y=1$.

Chú ý: Ta có thể giải hệ đã cho bằng cách giải của hệ đối xứng loại 1. Tuy nhiên, việc biến đổi tương đối phức tạp hơn.

Ví d**ụ** 4.5.30. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+\dfrac{2xy}{\sqrt{x^2-2x+5}}=x^2+y \\ y+\dfrac{2xy}{\sqrt{y^2-2y+5}}=y^2+x \end{cases}$.

Lời giải

* Ta thấy $x=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=y=0$ là một nghiệm của hệ.
* Với $xy \ne 0$ cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$x^2+y^2=2xy\left(\frac{1}{\sqrt{(x-1)^2+4}}+\frac{1}{\sqrt{(y-1)^2+4}}\right) \le 2xy\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=2xy$$

$\Rightarrow x^2-2x+y^2 \le 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \le 0 \Leftrightarrow x=y=1$.

Thử lại ta thấy thỏa mãn. Vậy hệ có nghiệm là: $(x;y)=(0;0),\ (1;1)$.

Ví d**ụ** 4.5.31. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} x+y=\sqrt[3]{24} \\ \left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}\right)=2 \end{cases}.$$

Lời giải.

Áp dụng bất đẳng thức AM-GM ta có:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+3y}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{x+y}{x+3y}\right) \\ \dfrac{\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{2y}{x+3y}\right) \end{cases} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x+3y}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right)$$

Chứng minh tương tự ta cũng có: $\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{y+3x}} \le \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{y}{x+y}+\dfrac{3}{2}\right)$

Cộng lại ta được $\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3y}}\right) \le 2$

Đẳng thức xảy ra nên $x=y$.

Vậy hệ có nghiệm duy nhất $x=y=\dfrac{\sqrt[3]{24}}{2}$.

Ví dụ 4.5.32. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0 & (1) \\ 7x^2-14x+3y^3+10=0 & (2) \end{cases}.$$

Lời giải.

Từ (1) suy ra: $y^2=\dfrac{2x}{x^2+1} \le 1 \Rightarrow \begin{cases} x \ge 0 \\ -1 \le y \le 1 \end{cases} \Rightarrow y^3 \ge -1\,(*)$

Từ (2) suy ra $7(x-1)^2+3(y^3+1)=0$

Mà $7(x-1)^2 \ge 0; 3(y^3+1) \ge 0$ (do (*)) $\Rightarrow 7(x-1)^2+3(y^3+1) \ge 0$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2=0 \\ y^3+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$

Thử lại ta thấy hệ có nghiệm $(x;y)=(1;-1)$.

Ví dụ 4.5.33. Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases}\sqrt{y^2-8x+9}-\sqrt[3]{xy+12-6x}\le 1 & (1)\\ \sqrt{2(x-y)^2+10x-6y+12}-\sqrt{y}=\sqrt{x+2} & (2)\end{cases}.$$

Lời giải.

Ta có: $(2)\Leftrightarrow\sqrt{2(x-y)^2+10x-6y+12}=\sqrt{y}+\sqrt{x+2}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y\ge 0;x\ge -2\\ (x-y)^2+5x-3y+6=\frac{1}{2}(\sqrt{y}+\sqrt{x+2})^2 \quad (3)\end{cases}$$

Ta có: $TV(3)=x^2-2xy+y^2+5x-3y+6$

$$=(x+2)^2-2y(x+2)+y^2+y+x+2$$

$$=(y-x-2)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{x+2}\right)^2\ge\frac{1}{2}(\sqrt{y}+\sqrt{x+2})^2=VP(3)$$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow y=x+2\Rightarrow(2)\Leftrightarrow y=x+2$.

Thay vào (1) ta được:

$$\sqrt{x^2-4x+13}-\sqrt[3]{x^2-4x+12}\le 1\Leftrightarrow\sqrt{t+3}-\sqrt[3]{t+2}\le 1 \quad (4).$$

Trong đó : $t=x^2-4x+10=(x-2)^2+6\ge 6\Rightarrow\sqrt[3]{t+2}\ge 2$.

Ta có: $t+3=1+\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3=1+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3+\frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^3\ge 1+2\sqrt[3]{t+2}+\left(\sqrt[3]{t+2}\right)^2$

$\Rightarrow t+3\ge\left(1+\sqrt[3]{t+2}\right)^2\Rightarrow\sqrt{t+3}-\sqrt[3]{t+2}\ge 1$ (5). Đẳng thức có khi $t=6$.

Từ (4) và (5) ta suy ra $\sqrt{t+3}-\sqrt[3]{t+2}=1\Leftrightarrow t=6\Leftrightarrow x=2$.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}$.

Ví dụ 4.5.34. Giải hệ phương trình $\begin{cases}y^2+(4x-1)^2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}\\ 40x^2+x=y\sqrt{14x-1}\end{cases}$.

Lời giải

Đk : $x\ge\frac{1}{14}$.

Hệ $\Leftrightarrow\begin{cases}y^2+16x^2-8x+1=\sqrt[3]{4x(8x+1)}\\ 80x^2+2x=2y\sqrt{14x-1}\end{cases}$

Cộng hai phương trình của hệ với nhau ta được:

$$y^2-2y\sqrt{14x-1}+14x-1+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}$$

$\Leftrightarrow (y-\sqrt{14x-1})^2+96x^2-20x+2=\sqrt[3]{4x(8x+1)}$ (1).

Ta có: $VT(1)\geq 96x^2-20x+2=\frac{1}{2}[3(8x-1)^2+8x+1]\geq \frac{1}{2}(8x+1)$

$$=\frac{1}{6}[16x+8x+1+2]\geq \frac{1}{2}\sqrt[3]{16x(8x+1)2}=\sqrt[3]{4x(8x+1)}=VP(1)$$

Suy ra (1) $\Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=\sqrt{14x-1}=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Thử lại hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x=\frac{1}{8} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$.

Ví dụ 4.5.35. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x+6\sqrt{xy}-y=6 \\ x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=3 \end{cases} \quad (x,y\in ¡).$$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} xy\geq 0 \\ x^2+xy+y^2\neq 0 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai của hệ ta thấy nếu $x\leq 0, y\leq 0$ thì dẫn đến hệ vô nghiệm, do đó ta chỉ giải hệ khi $x>0, y>0$.

Khi đó, PT thứ nhất của hệ được viết thành

$$x+6\sqrt{xy}-y=6 \Leftrightarrow x+2\sqrt{xy}=3+\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$$

$\Rightarrow x+2\sqrt{xy}\geq 3$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$.

Tiếp theo ta chứng minh,với $x+2\sqrt{xy}\geq 3$ thì

$$x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\geq 3.$$

Thật vậy, do $\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\geq \frac{x+y}{3} \Leftrightarrow \frac{(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}{x^2+xy+y^2}\geq \frac{x+y}{3}$

$\Leftrightarrow 3\left(x^2-xy+y^2\right)\geq x^2+xy+y^2 \Leftrightarrow (x-y)^2\geq 0$ (luôn đúng với mọi $x>0, y>0$)

suy ra $x+\frac{6\left(x^3+y^3\right)}{x^2+xy+y^2}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}\ge x+2\left(x+y\right)-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$.

Mặt khác theo BĐT CauChy-Schwarz ta có:

$$x+2\left(x+y\right)-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=x+2\sqrt{x^2+y^2+2xy}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$=x+2\sqrt{\frac{xy}{2}\left(1^2+1^2\right)\left(\frac{x^2+y^2}{xy}+2\right)}-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}$$

$$\ge x+2\sqrt{\frac{xy}{2}}\left(\sqrt{\frac{x^2+y^2}{xy}}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2\left(x^2+y^2\right)}=x+2\sqrt{xy}\ge 3$$

Đẳng thức xảy ra khi $x=y=1$.

Từ các lập luận trên dẫn đến hệ có nghiệm duy nhất $\left(x,y\right)=\left(1;1\right)$.

Ví dụ 4.5.36. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}2\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3}{2}}\left|y\right|\\2\sqrt[4]{\frac{y^4}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3}{2}}\left|x\right|\end{cases}.$$

Lời giải.

Trừ theo vế các PT của hệ ta được $2\left(\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}-\sqrt[4]{\frac{y^4}{3}+4}\right)=\sqrt{\frac{3}{2}}\left(\left|y\right|-\left|x\right|\right)$ (1)

* Nếu $\left|x\right|>\left|y\right|$ thì $\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}-\sqrt[4]{\frac{y^4}{3}+4}>0>\left|y\right|-\left|x\right|$

* Nếu $\left|x\right|<\left|y\right|$ thì $\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}-\sqrt[4]{\frac{y^4}{3}+4}<0<\left|y\right|-\left|x\right|$

Vậy $\left(1\right)\Leftrightarrow\left|x\right|=\left|y\right|$; thay vào PT thứ nhất của hệ ta được phương trình

$$2\sqrt[4]{\frac{x^4}{3}+4}=1+\sqrt{\frac{3}{2}}\left|x\right|\Leftrightarrow 4\sqrt{\frac{x^4}{3}+4}=1+\frac{3}{2}x^2+2\sqrt{\frac{3}{2}}\left|x\right| \quad (2)$$

Theo BĐT CauChy-Schwarz ta có:

$$4\sqrt{\frac{x^4}{3}+4}=\sqrt{\left(\frac{x^4}{3}+4\right)\left(\frac{6^2}{3}+4\right)}\ge\frac{6x^2}{3}+4=2x^2+4$$

Kết hợp với (2) suy ra $2x^2+4\le 1+\frac{3}{2}x^2+2\sqrt{\frac{3}{2}}\left|x\right|\Leftrightarrow\left(\left|x\right|-\sqrt{6}\right)^2\le 0$

$\Leftrightarrow |x| = \sqrt{6} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{6}$.

Vậy hệ phương trình có các nghiệm là

$\left(\sqrt{6};\sqrt{6}\right),\left(-\sqrt{6};\sqrt{6}\right),\left(\sqrt{6},-\sqrt{6}\right),\left(-\sqrt{6};-\sqrt{6}\right)$.

Ví d**ụ** 4.5.37. Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^{y+1} = (y+1)^x \\ \sqrt{-4x^2+18x-20} + \dfrac{2x^2-9x+6}{2x^2-9x+8} = \sqrt{y+1} \end{cases}.$$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} y+1>0 \\ -4x^2+18x-20 \ge 0 \\ 2x^2-9x+8 \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y > -1 \\ 2 \le x \le \dfrac{5}{2} \end{cases}$

Đặt $t = \sqrt{-4x^2+18x-20} = \sqrt{\dfrac{1}{4} - 4\left(x - \dfrac{9}{4}\right)^2} \Rightarrow 0 \le t \le \dfrac{1}{2}$

Ta có: $\sqrt{-4x^2+18x-20} + \dfrac{2x^2-9x+6}{2x^2-9x+8} = t+1+\dfrac{4}{t^2+4} = f(t), t \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right]$

$f'(t) = 1 - \dfrac{8t}{(t^2+4)^2} > 0,\ \forall t \in \left[0;\dfrac{1}{2}\right] \Rightarrow 2 = f(0) \le f(t) \le f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{83}{34} < \dfrac{5}{2}$

Suy ra $\sqrt{y+1} \ge 2 \Rightarrow y+1 \ge 4$.

Ta có: $x^{y+1} = \left(y+1\right)^x \Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{\ln(y+1)}{y+1} \Leftrightarrow g(x) = g(y+1)$ (*)

Trong đó $g(t) = \dfrac{\ln t}{t}$, $g'(t) = \dfrac{1-\ln t}{t^2} \Rightarrow g'(t) > 0 \Leftrightarrow t < e$

Do $x \in \left[2;\dfrac{5}{2}\right]$ nên suy ra $g(x) \le g(2) = \dfrac{\ln 2}{2}$

$y+1 \ge 4$ nên $g(y+1) \ge \dfrac{\ln 4}{4} = \dfrac{\ln 2}{2}$.

Từ đó suy ra $\begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$ là nghiệm duy nhất của hệ đã cho.

III. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Bài 4.5.1. Giải các hệ phương trình sau

1. $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ x+y = \sqrt{x+y+2} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} \\ \sqrt{x+4} - \sqrt{1-y} = \sqrt{1-2x} \end{cases}$

3. $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2\\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=4\end{cases}$

4. $\begin{cases}x^2+1+y(y+x)=4y\\ (x^2+1)(y+x-2)=y\end{cases}$

5. $\begin{cases}x\left[(x-y)^2+1\right]=y(8y^2-3xy+2)\\ 3x^2+4y^3+2=3y(x+4)\end{cases}$

6. $\begin{cases}x-\dfrac{1}{x}=y-\dfrac{1}{y}\\ 2y=x^3+1\end{cases}$

7. $\begin{cases}\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+\left(\dfrac{x}{y}\right)^3=12\\ (xy)^2+xy=6\end{cases}$

8. $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{2x}{y}}+\sqrt{\dfrac{2y}{x}}=3\\ x-y+xy=3\end{cases}$

9. $\begin{cases}x^2+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{x}{y}=3\\ x+\dfrac{x}{y}+\dfrac{1}{y}=3\end{cases}$

10. $\begin{cases}\sqrt{x+\sqrt{y}}+\sqrt{x-\sqrt{y}}=2\\ \sqrt{y+\sqrt{x}}-\sqrt{y-\sqrt{x}}=1\end{cases}$

11. $\begin{cases}8(x^2+y^2)+4xy+\dfrac{5}{(x+y)^2}=13\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=1\end{cases}$

12. $\begin{cases}x^2+y^2=2xy+1\\ x^5+y^3+1=0\end{cases}$

13. $\begin{cases}4xy+4(x^2+y^2)+\dfrac{3}{(x+y)^2}=\dfrac{85}{3}\\ 2x+\dfrac{1}{x+y}=\dfrac{13}{3}\end{cases}$

14. $\begin{cases}5x^2y-4xy^2+3y^3-2(x+y)=0\\ xy(x^2+y^2)+2=(x+y)^2\end{cases}$

15. $\begin{cases}x^2+y^2+x+y-4=0\\ 2x^2+xy-y^2-5x+y+2=0\end{cases}$

16. $\begin{cases}x+y+\sqrt{x-y}=8\\ y\sqrt{x-y}=2\end{cases}$

17. $\begin{cases}x^3+3xy^2=6xy-3x-49\\ x^2-8xy+y^2=10y-25x-9\end{cases}$

18. $\begin{cases}x^4+2x^3y+x^2y^2=2x+9\\ x^2+2xy=6x+6\end{cases}$

19. $\begin{cases}x^2+y+x^3y+xy^2+xy=-\dfrac{5}{4}\\ x^4+y^2+xy(1+2x)=-\dfrac{5}{4}\end{cases}$

20. $\begin{cases}xy+x+y=x^2-2y^2\\ x\sqrt{2y}-y\sqrt{x-1}=2x-2y\end{cases}$

21. $\begin{cases}x^4-x^3y+x^2y^2=1\\ x^3y-x^2+xy=-1\end{cases}$

22. $\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{2x+y}=5\\ \sqrt{2x+y}+x-y=2\end{cases}$

23. $\begin{cases} x^3+y^3-xy=1 \\ 6(y-2)^2+\frac{1}{2}(15-xy)=x^3y\left[(2y+3)^2-6\right] \end{cases}$

24. $\begin{cases} \sqrt{4x+y}+\sqrt{2x+y}=2 \\ \sqrt{2x+y}+x+y=1 \end{cases}$

25. $\begin{cases} x+y\ge 4 \\ (x^4+y^4)(x^7+y^7)=x^{11}+y^{11} \end{cases}$

26. $\begin{cases} xy=y+2 \\ x+z=2\sqrt{y}(\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}) \end{cases}$

27. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt[4]{32-x}-y^2=-3 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt{32-x}+6y=24 \end{cases}$

28. $\begin{cases} y+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-12y+1}=\frac{1}{12}(x^2+17) \\ \frac{x^2}{8y}+\frac{2x}{3}=\sqrt{\frac{x^3}{3y}+\frac{x^2}{4}}-\frac{y}{2} \end{cases}$

29. $\begin{cases} x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 \end{cases}$

30. $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 \\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 \end{cases}$

31. $\begin{cases} \sqrt[4]{x}\left(\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right)=2 \\ \sqrt[4]{y}\left(\frac{1}{4}-\frac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}\right)=1 \end{cases}$

32. $\begin{cases} x(y^3-x^3)=7 \\ x^4+x^3y+9y=y^3x+x^2y^2+9x \end{cases}$

33. $\begin{cases} x^{10}+x^2y^2(x+y^2)=3 \\ y^{10}+\frac{y^6}{x^4}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{3}{x^5} \end{cases}$

34. $\begin{cases} x^4-y^4=240 \\ x^3-2y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y) \end{cases}$.

35. $\begin{cases} \sqrt{3+2x^2y-x^4y^2}+x^2(1-2x^2)=y^4 \\ 1+\sqrt{1+(x-y)^2}=-x^2(x^4+1-2x^2-2xy^2) \end{cases}$

36. $\begin{cases} x^3+3y^2=2 \\ x^2+2y^3=3 \end{cases}$

37. $\begin{cases} 2x^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=2xy+x \\ 2y^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=-xy+2y \end{cases}$

38. $\begin{cases} x^4+x^3y+x^2y^2=2x+9 \\ x^2+2xy=6x+6 \end{cases}$

Hướng dẫn giải

1. Điều kiện : $\begin{cases} x+y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$.

Ta thấy mỗi phương trình của hệ là phương trình một ẩn $x+y$ và $x-y$. Do đó điều mà chúng ta nghĩ tới là đi giải từng phương trình tìm $x+y$ và

$x-y$, khi đó ta có được hệ phương trình mới đơn giản hơn nhiều. Để đơn giản về mặt hình thức ta đặt $a=x+y,\ b=x-y \Rightarrow a,b\ge 0$ ta có hệ :

$$\begin{cases}\sqrt{a}=\sqrt[3]{a}\\ \sqrt{b}=\sqrt[3]{b-12}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^3=a^2\\ b^3=(b-12)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=0 \text{ V } a=1\\ b=4\end{cases}.$$

* Với $\begin{cases}a=0\\ b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=0\\ x-y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\ y=-2\end{cases}$

* Với $\begin{cases}a=1\\ b=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=1\\ x-y=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{5}{2}\\ y=-\dfrac{3}{2}\end{cases}$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(2;-2),\ \left(\dfrac{5}{2};-\dfrac{3}{2}\right)$.

2. $\begin{cases}\sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y}\\ \sqrt{x+4}-\sqrt{1-y}=\sqrt{1-2x}\end{cases}$

Ta có: $\sqrt[3]{x-y}=\sqrt{x-y} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-y=0\\ x-y=1\end{array}\right.$

- $x=y$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{1-x}=\sqrt{1-2x} \Leftrightarrow \begin{cases}-4\le x\le \dfrac{1}{2}\\ x+4=2-3x+2\sqrt{(1-x)(1-2x)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-4\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 2x+1=\sqrt{2x^2-3x+1}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 2x^2+7x=0\end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

- $x-1=y$ thay vào phương trình thứ hai ta được:

$$\sqrt{x+4}-\sqrt{2-x}=\sqrt{1-2x} \Leftrightarrow \begin{cases}-4\le x\le \dfrac{1}{2}\\ x+4=3-3x+2\sqrt{(2-x)(1-2x)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\dfrac{1}{4}\le x\le \dfrac{1}{2}\\ (4x+1)^2=4(2x^2-5x+2)\end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{-7+3\sqrt{7}}{4} \Rightarrow y=\frac{-11+3\sqrt{7}}{4}.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(0;),\ \left(\dfrac{-7+3\sqrt{7}}{4};\dfrac{-11+3\sqrt{7}}{4}\right)$.

3. $\begin{cases}\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}=2 & (1)\\ \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{x^2-y^2}=4 & (2)\end{cases}$

Điều kiện : $x \geq |y|$

Từ (1) $\Rightarrow \sqrt{x+y} > \sqrt{x-y} \Rightarrow y > 0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2 - y^2} = 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 4 - \sqrt{x^2 - y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y^2} = x - 2 \\ \sqrt{x^2 + y^2} = 6 - x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 6 \\ x^2 - y^2 = (2-x)^2 \\ x^2 + y^2 = (6-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 6 \\ 2x^2 = (2-x)^2 + (6-x)^2 \\ x^2 + y^2 = (6-x)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x \leq 6 \\ 2x^2 = 40 - 16x + 2x^2 \\ y^2 = 36 - 12x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{2} \\ y = \sqrt{6} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $\left(\dfrac{5}{2}; \sqrt{6}\right)$.

4. $\begin{cases} x^2 + 1 + y(y+x) = 4y & (1) \\ (x^2+1)(y+x-2) = y & (2) \end{cases}$

Đặt $a = x + y$ từ (1) $\Rightarrow x^2 + 1 = y(4-a)$ thế vào (2), ta có:

$y(4-a)(a-2) = y \Leftrightarrow y(a^2 - 6a + 9) = 0 \Leftrightarrow y = 0;\ a = 3$

* Với $y = 0$ thay vào (1) ta thấy hệ vô nghiệm.

* Với $a = 3 \Leftrightarrow x + y = 3$ thay vào hệ ta có:

$x^2 + 1 = y = 3 - x \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \Rightarrow y = 2 \\ x = -2 \Rightarrow y = 5 \end{array}\right.$.

Vậy hệ đã cho có hai cặp nghiệm: $(x;y) = (1;2),\ (-2;5)$.

5. $\begin{cases} x\left[(x-y)^2 + 1\right] = y(8y^2 - 3xy + 2) & (1) \\ 3x^2 + 4y^3 + 2 = 3y(x+4) & (2) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow x\left(x^2 - 2xy + y^2 + 1\right) = 8y^3 - 3xy^2 + 2y$

$\Leftrightarrow x^3 - 8y^3 - 2x^2y + 4xy^2 + x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) - 2xy(x-2y) + x - 2y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + 4y^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow x = 2y$ thay vào (2) ta được:

$2y^3 + 3y^2 - 6y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y-1)(2y^2 + 5y - 1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1\Rightarrow x=2 \\ y=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}\Rightarrow x=\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(2;1)$, $\left(\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{2};\dfrac{-5\pm\sqrt{33}}{4}\right)$.

6. Điều kiện: $xy\neq 0$

Ta có $(1)\Leftrightarrow x-y+\dfrac{x-y}{xy}=0\Leftrightarrow (x-y)(1+\dfrac{1}{xy})=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ y=-\dfrac{1}{x} \end{array}\right.$.

* $x=y$ thay vào (2), ta được:

$x^3-2x+1=0\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-1)=0\Leftrightarrow x=1;x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

* $y=-\dfrac{1}{x}$ thay vào (2), ta được:

$x^4+x+2=0\Leftrightarrow \left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)+\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}=0$ vô nghiệm.

Vậy hệ đã cho có ba cặp nghiệm: $x=y=1;x=y=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$.

7. Đk: $xy\neq 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}=2 \\ (xy)^2+xy-6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y \\ 2y^4+y^2-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=-2 \\ y=-1 \end{cases}$.

8. Đk: $xy>0$

Hệ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} \sqrt{\dfrac{2x}{y}}=1 \\ \sqrt{\dfrac{2x}{y}}=2 \end{array}\right. \\ x-y+xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=2x \\ 2x^2-x-3=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2y \\ 2y^2+y-3=0 \end{cases} \end{array}\right.$ giải các hệ này ta được nghiệm của hệ đã cho: $(x;y)=(-1;-2)$, $\left(\dfrac{3}{2};3\right)$, $(2;1)$, $\left(-2;-\dfrac{3}{2}\right)$.

9. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+\dfrac{1}{y})^2-\dfrac{x}{y}=3 \\ (x+\dfrac{1}{y})+\dfrac{x}{y}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}=1 \\ x+\dfrac{1}{y}=2 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=6 \\ x+\dfrac{1}{y}=-3 \end{cases}$ (II)

Giải (I): $\begin{cases} x = y \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

Giải (II): $\begin{cases} x = 6y \\ 6y^2 + 3y + 1 = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy hệ có một cặp nghiệm: $(x; y) = (1; 1)$.

10. Đk: $\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x^2 \geq y \\ y^2 \geq x \end{cases}$.

Hệ $\Rightarrow \begin{cases} x + \sqrt{x^2 - y} = 2 \\ 2y - 2\sqrt{y^2 - x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 - y} = 2 - x \\ 2y - 1 = 2\sqrt{y^2 - x} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 2; y \geq \frac{1}{2} \\ 4x - y = 4 \\ 4x - 4y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{12} \\ y = \frac{5}{3} \end{cases}$. Thử lại hệ ta thấy thỏa mãn

Vậy nghiệm của hệ: $(x; y) = \left(\frac{17}{12}; \frac{5}{3}\right)$.

11. Đặt $a = x + y + \frac{1}{x + y}, b = x - y$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 5\left[(x + y)^2 + \frac{1}{(x + y)^2}\right] + 3(x - y)^2 = 13 \\ (x + y + \frac{1}{x + y}) + x - y = 1 \end{cases}$

nên ta có: $\begin{cases} 5(a^2 - 2) + 3b^2 = 13 \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a^2 + 3b^2 = 23 \\ a + b = 1 \end{cases}$

Giải hệ này ta tìm được $\begin{cases} a = 4 \\ b = -3 \end{cases}$ và $\begin{cases} a = -\frac{5}{2} \\ b = \frac{7}{2} \end{cases}$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ:

$$(x; y) = \left(\frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}; \frac{5 \pm \sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{3}{4}; -\frac{11}{4}\right), \left(\frac{3}{2}; -2\right).$$

12. Từ phương trình thứ nhất, ta có: $x - y = \pm 1$

- $y = x - 1$ thay vào phương trình thứ hai ta có:

  $x^5 + (x-1)^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow x\left(x^4 + x^2 - 3x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = -1$

- $y = x + 1$ thay vào phương trình thứ hai ta có:

$$x^5 + (x+1)^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+1)\left[x^4 - x^3 + x^2 - x + 1 + (x+1)^2\right] = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow y = 0$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (0;-1),(-1;0)$.

13. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 + 3(x+y)^2 + \dfrac{3}{(x+y)^2} = \dfrac{85}{3} \\ (x-y) + (x+y) + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{13}{3} \end{cases}$

Đặt $a = x - y; b = x + y + \dfrac{1}{x+y}$. Ta có hệ:

$$\begin{cases} a^2 + 3b^2 = \dfrac{103}{3} \\ a + b = \dfrac{13}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \dfrac{13}{3} - a \\ 2a^2 - 13a + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{10}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a = \dfrac{11}{2} \\ b = -\dfrac{7}{6} \end{cases}$$

* $\begin{cases} a = 1 \\ b = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \\ 3(x+y)^2 - 10(x+y) + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$

* $\begin{cases} a = \dfrac{11}{2} \\ b = -\dfrac{7}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = \dfrac{11}{2} \\ 6(x+y)^2 + 7(x+y) + 6 = 0 \end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: $(x;y) = (2;1), \left(\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}\right)$.

14. Ta có: $xy\left(x^2 + y^2\right) + 2 = (x+y)^2 \Leftrightarrow xy(x+y)^2 - (x+y)^2 - 2(x^2y^2 - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x+y)^2(xy - 1) - (xy - 1)(2xy + 2) = 0 \Leftrightarrow (xy - 1)\left(x^2 + y^2 - 2\right) = 0$

- $xy = 1 \Leftrightarrow y = \dfrac{1}{x}$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

  $x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1 \Rightarrow y = \pm 1$

- $x^2 + y^2 = 2 \Rightarrow y^2 = 2 - x^2$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có:

$$5x^2y-4x\left(2-x^2\right)+3\left(2-x^2\right)y-2x-2y=0 \Leftrightarrow y=\frac{5x-2x^3}{x^2+2}$$

Thay vào phương trình $x^2+y^2=2$ ta có: $x^2+\dfrac{x^2\left(5-2x^2\right)^2}{(x^2+2)^2}=2$

Đặt $t=x^2, t\ge 0$ ta được: $t\left(t^2+4t+4\right)+t\left(25-20t+4t^2\right)=2\left(t^2+4t+4\right)$

Biến đổi và rút gọn ta có: $5t^3-18t^2+21t-8=0$, phương trình này có hai nghiệm $t=1, t=\dfrac{8}{5}$.

- $t=1 \Rightarrow \begin{cases} x^2=1 \\ y=\dfrac{5x-2x^3}{x^2+2} \end{cases} \Rightarrow (x;y)\in\{(-1;-1),(1;1)\}$
- $t=\dfrac{8}{5} \Rightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{8}{5} \\ y=\dfrac{5x-2x^3}{x^2+2} \end{cases} \Leftrightarrow (x;y)\in\left\{\left(\dfrac{2\sqrt{10}}{5};\dfrac{\sqrt{10}}{5}\right),\left(\dfrac{-2\sqrt{10}}{5};\dfrac{-\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$

Tóm lại hệ có các nghiệm là:

$$(x;y)=(1;1),(-1;-1),\left(\frac{2\sqrt{10}}{5};\frac{\sqrt{10}}{5}\right),\left(\frac{-2\sqrt{10}}{5};\frac{-\sqrt{10}}{5}\right).$$

15. Đặt $x=a+1; y=b+1$ ta có hệ:

$$\begin{cases} a^2+b^2+3a+3b=0 \\ 2a^2+ab-b^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+b^2+3a+3b=0 \\ (a+b)(2a-b)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-b \\ 2a^2=0 \end{cases} \\ \begin{cases} b=2a \\ 5a^2+9a=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b=0 \\ \begin{cases} a=-\dfrac{9}{5} \\ b=-\dfrac{18}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=1 \\ \begin{cases} x=-\dfrac{4}{5} \\ y=-\dfrac{13}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

16. Đk: $x-y\ge 0$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=8-2y-\dfrac{2}{y} \\ y\sqrt{x-y}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8-2y-\dfrac{2}{y} \\ y\ge 0 \\ y^2(8-2y-\dfrac{2}{y})=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=8-y-\dfrac{2}{y} \\ y\ge 0 \\ y^3-4y^2+y+2=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 - y - \dfrac{2}{y} \\ y \ge 0 \\ (y-1)(y^2 - 3y - 2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \cup \begin{cases} x = 8 - \sqrt{17} \\ y = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2} \end{cases}.$$

17. Cách 1: Đặt $x = a + b, y = a - b$ ta có hệ

$$\begin{cases} 4a^3 + 4b^3 - 6a^2 + 6b^2 + 3a + 3b + 49 = 0 \quad (1) \\ -6a^2 + 10b^2 + 15a + 35b + 9 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Lấy $(1)x2 + (2)x6$ ta có được

$$\left(8a^3 - 48a^2 + 96a - 64\right) + \left(8b^3 + 72b^2 + 216b + 216\right) = 0$$

$\Leftrightarrow (2a-4)^3 + (2b+6)^3 = 0 \Leftrightarrow b = -1 - a$ thay vào (2) ta có: $a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$

Từ đó ta tìm được nghiệm của hệ là: $(x; y) = (-1; 5), (-1; -3)$.

Cách 2. Nhân phương trình thứ hai của hệ với 3 và cộng hai phương trình theo vế ta có

$$x^3 + 3x^2 + 3y^2(x+1) - 24xy = 6xy + 30y - 78x - 76$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 76) + 3y^2(x+1) - 30y(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 3y^2 - 30y + 76) = 0 \quad (*)$$

Do $x^2 + 2x + 3y^2 - 30y + 76 = (x+1)^2 + 3(y-5)^2 \ge 0$ và không có đẳng thức xảy ra nên (*) tương đương với $x = -1$.

Thay vào hệ ta tìm được $y = -3, y = 5$.

18. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 3x + 3 - \dfrac{1}{2}x^2 \\ x^4 + x^2(6 + 6x - x^2) + (3 + 3x - \dfrac{1}{2}x^2)^2 = 2x + 9 \quad (1) \end{cases}$

(1) $\Leftrightarrow x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow x(x+4)^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -4 \end{array}\right.$

* $x = 0$ không thỏa mãn hệ
* $x = -4 \Rightarrow y = \dfrac{17}{4}$

Vậy nghiệm của hệ: $(x; y) = (-4; \dfrac{17}{4})$.

19. Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y+xy(x^2+y)+xy=-\dfrac{5}{4} \\ (x^2+y)^2+xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$. Đặt $a=x^2+y; b=xy$

Ta có: $\begin{cases} a+ab+b=-\dfrac{5}{4} \\ a^2+b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{5}{4}-a^2 \\ a+a(-\dfrac{5}{4}-a^2)-\dfrac{5}{4}-a^2=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b=-\dfrac{5}{4}-a^2 \\ a^3+a^2+\dfrac{1}{4}a=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-\dfrac{5}{4} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

* $\begin{cases} a=0 \\ b=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=0 \\ xy=-\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}} \\ y=-\sqrt[3]{\dfrac{25}{16}} \end{cases}$

* $\begin{cases} a=-\dfrac{1}{2} \\ b=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y=-\dfrac{1}{2} \\ xy=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-\dfrac{3}{2} \end{cases}$.

Hệ có hai cặp nghiệm: $(x;y)=\left(\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};-\sqrt[3]{\dfrac{24}{16}}\right), \left(1;-\dfrac{3}{2}\right)$.

20. Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 1 \\ y\ge 0 \end{cases}$

Ta có: $xy+x+y=x^2-2y^2 \Leftrightarrow y(x+y)+x+y=(x-y)(x+y)$

$\Leftrightarrow (x+y)(2y-x+1)=0 \Leftrightarrow x=2y+1$ (do điều kiện)

Thay vào hệ ta có:

$(2y+1)\sqrt{2y}-y\sqrt{2y}=2y+2 \Leftrightarrow \sqrt{2y}(y+1)-2(y+1)=0 \Leftrightarrow y=2 \Rightarrow x=5$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(5;2)$.

21. Ta thấy $x=0$ không thỏa mãn hệ phương trình . Ta xét $x\ne 0$, khi đó:

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3y-x^2+xy=-1 \\ x^4-x^2+x^2y^2+xy=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3y-x^2+xy=-1 \\ x^3-x+xy^2+y=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \dfrac{x^2-1}{x^2+1} \\ x(x^2-1)+y(xy+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)} \\ x(x^2-1)+\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}+1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)} \\ (x^2-1)\left(x+\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=0 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ: $(x;y)=(\pm 1;0)$

22. Cách 1: Đặt $t=y-x \Leftrightarrow y=x+t$ ta có hệ:

$$\begin{cases} \sqrt{7x+y}=3-t \\ \sqrt{2x+y}=2+t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x+t=(3-t)^2 \\ 3x+t=(2+t)^2 \\ -2\le t\le 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3t-8t=3(3-t)^2-8(2+t)^2 \\ -2\le t\le 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^2+9t+1=0 \\ -2\le t\le 3 \end{cases} \Leftrightarrow t=\dfrac{-9+\sqrt{77}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{(t+2)^2-t}{3}=10-\sqrt{77} \\ y=t+x=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \end{cases}$$

là nghiệm của hệ đã cho.

* Cách 2: Đặt $u=\sqrt{7x+y}$, $v=\sqrt{2x+y}$. Hệ trở thành: $\begin{cases} u+v=5 \\ v=2+y-x \end{cases}$.

Mặt khác $u^2-v^2=5x \Rightarrow (u-v)(u+v)=5x \Rightarrow u-v=x$

$\Rightarrow v=\dfrac{5-x}{2}$ (Do $u+v=5$) $\Rightarrow \dfrac{5-x}{2}=2+y-x \Rightarrow y=\dfrac{1+x}{2}$

Thay vào hệ ta có được: $\sqrt{2x+\dfrac{1+x}{2}}=\dfrac{5-x}{2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ 10x+2=(5-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 5 \\ x^2-20x+23=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=10-\sqrt{77} \Rightarrow y=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2}.$$

Thay vào hệ ta thấy thỏa mãn.

Vậy hệ đã cho có nghiệm $\begin{cases} x=10-\sqrt{77} \\ y=\dfrac{11-\sqrt{77}}{2} \end{cases}$.

23. Hệ đã cho tương đương với: $\begin{cases} x^3+y^3-xy=1 \\ 12(y-2)^2-xy+15=2x^3y\left[(2y+3)^2-6\right] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3+y^3-xy=1 \\ 12y^2-48y+63=8x^3y^3+24x^3y^2+6x^3y \end{cases}$$

Trừ hai phương trình của hệ ta có được:

$$x^3\left(8y^3+24y^2+6y+1\right)=-(y^3-12y^2+48y-64)$$

$$\Leftrightarrow x^3(2y+1)^3=-(y-4)^3 \Leftrightarrow x(2y+1)=-y+4 \Leftrightarrow x+y+2xy=4$$

Kết hợp với hệ ta có: $\begin{cases} x^3+y^3-xy=1 \\ x+y+2xy=4 \end{cases}$

Đặt $S=x+y, P=xy$ ta có: $\begin{cases} S^3-3SP-P=1 \\ S+2P=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P=\dfrac{4-S}{2} \\ 2S^3+3S^2-11S-6=0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} S=2 \Rightarrow P=1 \\ S=\dfrac{-5\pm\sqrt{13}}{2} \Rightarrow P=\dfrac{13\mp\sqrt{13}}{4} \end{array}\right.\cdot$$

- $\begin{cases} S=2 \\ P=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=1$
- $\begin{cases} S=\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2} \\ P=\dfrac{13-\sqrt{13}}{4} \end{cases}$ vô nghiệm do $S^2<4P$
- $\begin{cases} S=\dfrac{-5-\sqrt{13}}{2} \\ P=\dfrac{13+\sqrt{13}}{4} \end{cases} \Rightarrow x, y$ là nghiệm của phương trình :

$$4t^2+2(5+\sqrt{13})t+13+\sqrt{13}=0 \Leftrightarrow t=\frac{-5-\sqrt{13}\pm\sqrt{6\sqrt{13}-14}}{4}$$

Vậy nghiệm của hệ đã cho là:

$$(x;y)=(1;1),\ \left(\frac{-5-\sqrt{13}\pm\sqrt{6\sqrt{13}-14}}{4};\frac{-5-\sqrt{13}\mp\sqrt{6\sqrt{13}-14}}{4}\right).$$

24. Đặt $t = x + y$, ta có: $\begin{cases} \sqrt{4x+y} = 1+t \\ \sqrt{2x+y} = 1-t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + y = 1 + 2t + t^2 \\ 2x + y = 1 - 2t + t^2 \Rightarrow 2x = 4t \\ -1 \le t \le 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 2x = 4(x+y) \Leftrightarrow x = -2y$

Thay vào hệ ta có: $y^2 + 5y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \dfrac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$

So với điều kiện ta có nghiệm của hệ là: $\begin{cases} x = 5 - \sqrt{21} \\ y = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$.

25. Trước hết ta có BĐT sau: $\dfrac{a^n + b^n}{2} . \dfrac{a^m + b^m}{2} \le \dfrac{a^{m+n} + b^{m+n}}{2}$ (1) với m, n là các số nguyên dương và a,b là các số thực thỏa mãn: $a + b \ge 0$.

Thật vậy: Không mất tính tổng quát ta giả sử $a \ge b$.

$(1) \Leftrightarrow (a^m - b^m)(a^n - b^n) \ge 0$ (2)

* Nếu $b \ge 0 \Rightarrow \begin{cases} a^n \ge b^n \\ a^m \ge b^m \end{cases} \Rightarrow (2)$ đúng.

* Nếu $b < 0$ do $\begin{cases} a \ge b \\ a \ge -b \end{cases} \Rightarrow a \ge |b| \Rightarrow \begin{cases} a^n \ge |b|^n \ge b^n \\ a^m \ge |b|^m \ge b^m \end{cases} \Rightarrow (2)$ đúng

Vậy (1) đã được chứng minh.

Vì $a + b \ge 4 \Rightarrow a + b > 0$ và $a^7 + b^7 > 0$. Áp dụng (1) ta có:

$$\frac{x+y}{2}.\frac{x^4+y^4}{2}.\frac{x^7+y^7}{2} \le \frac{x^5+y^5}{2}.\frac{x^7+y^7}{2} \le \frac{x^{12}+y^{12}}{2}$$

$$\Rightarrow x^{12} + y^{12} \ge \frac{x+y}{4}(x^4+y^4)(x^7+y^7) \ge (x^4+y^4)(x^7+y^7)$$

Đẳng thức có $\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 2$

Vậy nghiệm của hệ: $x = y = 2$.

26. Điều kiện: $x, y, z \ge 0$

Ta có: $x + z = 2\sqrt{xy} - 2y + 2\sqrt{yz} \Leftrightarrow x - 2\sqrt{xy} + y + z - 2\sqrt{yz} + y = 0$

$\Leftrightarrow (\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 + (\sqrt{y} - \sqrt{z})^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = z$

Thay vào hệ ta có: $\left[\begin{array}{l} x = y = z = -1 \\ x = y = z = 2 \end{array}\right.$ là nghiệm của hệ đã cho.

27. Điều kiện: $0 \le x \le 32$.

Cộng hai phương trình của hệ lại ta được:

$\sqrt{x}+\sqrt{32-x}+\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x}=y^2-6y+21=(y-3)^2+12$ (1).

Gọi A, B lần lượt là VT và VP của (1). Ta có: $B \ge 12$ (2)

Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x}+\sqrt{32-x} \le \sqrt{2(x+32-x)}=8 \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{32-x} \le \sqrt{2(\sqrt{x}+\sqrt{32-x})} \le 4\end{array}\right\} \Rightarrow A \le 12 \ (3)$$

Từ (2) và (3) $\Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}=\sqrt{32-x} \\ y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=16 \\ y=3\end{cases}$ là nghiệm của hệ.

28. Phương trình thứ nhất của hệ $\Leftrightarrow 12y+8\sqrt{x^2-12y+1}=x^2+17$

$\Leftrightarrow (x^2-12y+1)-8\sqrt{x^2-12y+1}+16=0 \Leftrightarrow x^2-12y+1=16$

$\Leftrightarrow y=\dfrac{x^2-15}{12}$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được:

$$\frac{3x^2}{2(x^2-15)}+\frac{2x}{3}=\sqrt{\frac{4x^3}{x^2-15}+\frac{x^2}{4}-\frac{x^2-15}{24}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{36x^2}{x^2-15}-12\sqrt{\frac{x^2}{x^2-15}(x^2+16x-15)}+x^2+16x-15=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+16x-15 \ge 0 \\ 6\sqrt{\dfrac{x^2}{x^2-15}}=\sqrt{x^2+16x-15}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+16x-15 \ge 0 \\ 36\dfrac{x^2}{x^2-15}=x^2+16x-15\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+16x-15 \ge 0 \\ (x^2+2x-15)(x^2+18x-15)=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3 \\ x=-9-4\sqrt{6}\end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=\left(3;-\dfrac{1}{2}\right), \left(-9-4\sqrt{6};\dfrac{81+36\sqrt{6}}{6}\right)$.

29. $\begin{cases}x^3-y^3+3y^2-3x-2=0 & (1) \\ x^2+\sqrt{1-x^2}-3\sqrt{2y-y^2}+2=0 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $\begin{cases}-1 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 2\end{cases}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^3-3x=(y-1)^3-3(y-1) \Leftrightarrow f(x)=f(y-1)$ (3)

Vì $y \in [0;2] \Rightarrow y-1 \in [-1;1]$

Xét hàm số $f(t)=t^3-3t, t\in[-1;1]$ ta có:

$f'(t)=3\left(t^2-1\right)\le 0,\ \forall x\in[-1;1]$ nên từ (3) ta có $x=y-1$

Thay vào hệ ta có: $x^2-2\sqrt{1-x^2}+1=0\Leftrightarrow x=0, y=1$.

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(0;1)$.

30. $\begin{cases} x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1)\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $x\ge -\dfrac{5}{4}$

Ta thấy $y=0$ không là nghiệm của hệ nên $y\ne 0$. Khi đó

$(1)\Leftrightarrow\left(\dfrac{x}{y}\right)^5+\dfrac{x}{y}=y^5+y\Leftrightarrow\dfrac{x}{y}=y$ (do hàm số $f(t)=t^5+t$ đồng biến trên ¡)

$\Leftrightarrow x=y^2$ thay vào (2) ta được: $\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6\Leftrightarrow x=1\Rightarrow y=\pm1$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(1;\pm1)$.

31. Điều kiện: $\begin{cases} x, y\ge 0\\ x+y\ne 0\end{cases}$

Ta thấy $x=0\ (y=0)$ không là nghiệm của hệ nên hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases}\dfrac{1}{4}+\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}\\ \dfrac{1}{4}-\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}\\ \dfrac{1}{2}=\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}\end{cases}$$

Suy ra $\dfrac{2\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x+y}=\left(\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}\right)\left(\dfrac{2}{\sqrt[4]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[4]{y}}\right)=\dfrac{4}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{y}}$

$\Leftrightarrow x\sqrt{x}-2x\sqrt{y}+2y\sqrt{x}-4y\sqrt{y}=0$. Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ ta có:

$t^3-2t^2+2t-4=0\Leftrightarrow t=2\Leftrightarrow x=4y$

Từ đó ta tìm được $\begin{cases} x=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}{4}\\ y=\dfrac{\left(\sqrt{2}+1\right)^4}{16}\end{cases}$.

32. Từ phương trình thứ nhất, suy ra $x-y\ne 0$.

Phương trình thứ hai của hệ tương đương với

$$x^2\left(x^2-y^2\right)+xy\left(x^2-y^2\right)-9(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow x^2(x+y)+xy(x+y)-9=0 \Leftrightarrow x(x+y)^2=9 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=\pm\dfrac{3}{\sqrt{x}} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-x\pm\dfrac{3}{\sqrt{x}} \\ x>0 \end{cases}$$

Do $y^3-x^3>0 \Rightarrow y>x>0 \Rightarrow y=-x-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$ loại

Với $y=\dfrac{3}{\sqrt{x}}-x$ thay vào phương trình thứ nhất của hệ ta có

$x\left[\left(\dfrac{3}{\sqrt{x}}-x\right)^3-x^3\right]=7$. Đặt $t=\sqrt{x}$ ta được

$t^2\left[\left(\dfrac{3}{t}-t^2\right)^3-t^6\right]=7 \Leftrightarrow f(t)=2t^9-9t^6+27t^3+7t-27=0$ (*)

Ta có: $f'(t)=18t^8-54t^5+81t^2+7\geq 2\sqrt{18t^8.81t^2}-54t^5+7>0$ và $f(1)=0$

Nên (*) có nghiệm duy nhất $t=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow y=2$

Vậy $(x;y)=(1;2)$ là nghiệm của hệ.

33. $\begin{cases} x^{10}+x^2y^2(x+y^2)=3 \\ y^{10}+\dfrac{y^6}{x^4}+\dfrac{y^2}{x^2}=\dfrac{3}{x^5} \end{cases}$

Từ phương trình thứ hai của hệ ta suy ra $x>0$.

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^{10}+x^3y^2+x^2y^4=3 \\ y^{10}x^5+y^6x+y^2x^3=3 \end{cases}$

Suy ra $x^{10}+x^2y^4=y^{10}x^5+xy^6 \Leftrightarrow x^5\left(x^5-y^{10}\right)+xy^4\left(x-y^2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left(x-y^2\right)\left[x^5\left(x^4+x^3y^2+x^2y^4+xy^6+y^8\right)+xy^4\right]=0$

$\Leftrightarrow x=y^2$ thay vào hệ ta có: $y^{20}+2y^8=3$

Đặt $t=y^4, t\geq 0$ ta có: $t^5+2t^2-3=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^4+t^3+t^2+3t+3)=0 \Leftrightarrow t=1$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y)=(1;\pm 1)$.

34. $\begin{cases} x^4-y^4=240 \\ x^3-2y^3=3(x^2-4y^2)-4(x-8y) \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - y^4 = 240 \\ 8x^3 - 24x^2 + 32x = 16y^3 - 96y^2 + 256y \end{cases}$

Suy ra $x^4 - 8x^3 + 24x^2 - 32x + 16 = y^4 - 16y^3 + 96y^2 - 256y + 256$

$$\Leftrightarrow (x-2)^4 = (y-4)^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2 = y-4 \\ x-2 = -y+4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y-2 \\ x = 6-y \end{array}\right. .$$

- $x = y-2$ thay vào hệ ta có:

  $(y-2)^4 - y^4 = 240 \Leftrightarrow 8y^3 - 24y^2 + 32y + 224 = 0 \Leftrightarrow y = -2$

- $x = 6-y$ thay vào hệ ta có: $(y-6)^4 - y^4 = 240 \Leftrightarrow y = 2$

Vậy nghiệm của hệ là: $(x;y) = (-4;-2)$, $(4;2)$.

35. Vì: $\sqrt{3 + 2x^2y - x^4y^2} = \sqrt{4 - (1 - x^2y)^2} \le 2$ và $1 + \sqrt{1 + (x-y)^2} \ge 2$

Nên từ hệ $\Rightarrow y^4 + 2x^4 - x^2 \le -x^6 - x^2 + 2x^4 + 2x^3y^2$

$$\Leftrightarrow x^6 - 2x^3y^2 + y^4 \le 0 \Leftrightarrow (x^3 - y^2)^2 \le 0 \Leftrightarrow x^3 = y^2$$

Do đó hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x^2y = 0 \\ x - y = 0 \\ x^3 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$ là nghiệm của hệ.

36. $\begin{cases} x^3 + 3y^2 = 2 \\ x^2 + 2y^3 = 3 \end{cases}$

Hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 3\left(1 - y^2\right) \\ x^2 - 1 = 2\left(1 - y^3\right) \end{cases}$

Nếu $y = 1 \Rightarrow x = -1$ là một cặp nghiệm của hệ

Nếu $y \ne 1$ ta có $x \ne \pm 1$, ta có:

$$\frac{x^3 + 1}{x^2 - 1} = \frac{3\left(1 - y^2\right)}{2\left(1 - y^3\right)} \Leftrightarrow \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{3}{2}.\frac{1 + y}{1 + y + y^2} \quad (*)$$

Xét hàm số $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x - 1} = x + \dfrac{1}{x-1} = x - 1 + \dfrac{1}{x-1} + 1$

Do $\left|x - 1 + \dfrac{1}{x-1}\right| \ge 2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} f(x) \ge 3 \\ f(x) \le -1 \end{array}\right. \quad (1)$

Tương tự: $-\dfrac{1}{3} \le \dfrac{y+1}{y^2 + y + 1} \le 1 \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta suy ra (*) vô nghiệm.

Vậy hệ có nghiệm $(x;y)=(-1;1)$.

37. Điều kiện xác định: $x \le 2, y \ge 1$

Ta có: $\begin{cases} 2x^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=2xy+x \\ 2y^2+\sqrt{2-x}+\sqrt{y-1}-34=-xy+2y \end{cases}$

Trừ từng vế của hai phương trình ta được:

$$2x^2-2y^2=3xy+x-2y \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-2y=0 \\ 2x+y=1 \end{array}\right.$$

Nếu $x=2y$ thì $2\ge x=2y\ge 2$ nên $x=2, y=1$, không thỏa mãn hệ.

Nếu $2x+y=1$ thì thay vào phương trình đầu ta được:

$$6x^2-3x-34+\sqrt{2-x}+\sqrt{-2x}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x+2)(2x-5)-\frac{x+2}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{2(x+2)}{\sqrt{-2x}+2}=0 \Leftrightarrow x=-2$$

Vì $3(2x-5)-\frac{1}{\sqrt{2-x}+2}-\frac{1}{\sqrt{-2x}+2}<0$ do $x<0$.

Với $x=-2$ thì $y=5$.

38. $\begin{cases} x^4+x^3y+x^2y^2=2x+9 & (1) \\ x^2+2xy=6x+6 & (2) \end{cases}$

Bình phương 2 vế phương trình (2) được $\frac{x^4}{4}+x^3y+x^2y^2=9(x+1)^2$

Trừ vế với vế phương trình (1) cho phương trình trên được :

$$\frac{3x^4}{4}=-9x^2-16x$$

Vì $x=0$ không thoả mãn hệ phương trình ban đầu nên $\frac{3x^3}{4}+9x+16=0$ (*)

Phương trình trên có nghiệm duy nhất do hàm số ở VT đồng biến

Đặt $x=2t-\frac{2}{t}$ thì $x^3=8(t^3-\frac{1}{t^3})-12x$, ta có:

$$6(t^3-\frac{1}{t^3})-9x+9x+16=0 \Leftrightarrow 3t^3-\frac{3}{t^3}+8=0$$

Do vậy $t^3=-3$ hoặc $t^3=\frac{1}{3}$

Suy ra $x=\frac{2}{\sqrt[3]{3}}-2\sqrt[3]{3}$ là nghiệm duy nhất của pt (*)

Thế vào pt(2) được $y = \dfrac{6x + 6 - x^2}{2x} = 3 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{x} = 3 - \dfrac{1}{\sqrt[3]{3}} + \sqrt[3]{3} + \dfrac{3\sqrt[3]{3}}{2 - 2\sqrt[3]{9}}$.